MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 8
Käytiin läpi pe 11.11.2011

1. Osoita, että yllä määritelty d on metriikka l_∞:ssä.

Ratkaisu.

M1 Osoitetaan ensin, että jos $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ ovat mitä tahansa funktioita, niin

$$\sup\{f(x)+g(x) \mid x \in X\} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}. \qquad (*)$$

Merkitään $M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}$. Riittää osoittaa, että M on joukon $\{f(x)+g(x) \mid x \in X\}$ yläraja, sillä silloin, koska supremum on määritelmän nojalla *pienin* yläraja, niin se on korkeintaan M. Olkoon $x \in X$. Nyt pätee sekä $f(x) \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in X\}$, että $g(x) \leqslant \sup\{g(x) \mid x \in X\}$ ja yhdistämällä nämä saadaan $f(x)+g(x) \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\} \leqslant M$.

Olkoon nyt (x_n), (y_n) ja (z_n) kolme jonoa l_∞:ssä. Seuraavassa merkitään $\mathrm{M1}_\mathbb{R}$:lla reaalilukujen kolmioepäyhtälöä, eli metriikan ehtoa M1 reaaliluvuille:

$$\begin{aligned} d((x_n),(y_n)) + d((y_n),(z_n)) &= \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n - z_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\overset{(*)}{\geqslant} \sup\{|x_n - y_n| + |y_n - z_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\overset{\mathrm{M1}_\mathbb{R}}{\geqslant} \sup\{|x_n - z_n| : n \in \mathbb{N}\} \\ &= d(x_n, z_n) \end{aligned}$$

M2 Tämäkin palautuu reaalilukujen ehtoon M2: $d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{|y_n - x_n| : n \in \mathbb{N}\} = d(y,x)$

M3 Jos $(x_n) = (y_n)$, eli $x_n = y_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, niin tietenkin $|x_n - y_n| = 0$ jokaisella n ja $d((x_n),(y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{0\} = 0$. Toisaalta jos $d((x_n),(y_n)) = 0$, tarkoittaa se sitä, että $\sup A = 0$, missä $A = \{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Joukossa A on pelkkiä itseisarvoja, joten siellä ei ole negatiivisia lukuja ja koska $\sup A = 0$, ei siellä ole positiivisiakaan, mistä saadaan, että $A = \{0\}$ ja $|x_n - y_n| = 0$ jokaisella n. Tästä seuraa, että $(x_n) = (y_n)$.

2. (Melkein kuten 11:8) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ olkoon $e_n \in l_\infty$ sellainen jono $(e_{n1}, e_{n2}, \dots)$ jolle pätee $e_{ni} = 1$ kun $i = n$ ja $e_{ni} = 0$ muuten. Osoita, että jonolla (e_n) ei ole kasautumisarvoja.

Ratkaisu. Olkoon a joku alkio l_∞:ssä. Osoitetaan, että se ei ole jonon (e_n) kasautumisarvo. Tätä varten riittää todistaa, että kuulassa $B(a, 1/2)$ on korkeintaan yksi jonon (e_n) jäsen, sillä kasautumisarvon määritelmästä seuraa, että siinä pitäisi olla äärettömän monta sellaista. Tätä varten todistetaan, että jos $n \neq m$, niin alkioista e_n ja e_m vain toinen voi olla kuulassa $B(a, 1/2)$. Oletetaan, että $e_n \in B(a, 1/2)$. Tästä seuraa

$$d(a, e_n) < 1/2 \qquad (1).$$

Toisaalta $d(e_n, e_m) = \sup\{|e_{ni} - e_{mi}| : i \in \mathbb{N}\} = 1$, koska $e_{nn} = 1$ kun $i = n$ ja $e_{mn} = 0$, kun $n \neq m$. Siispä Lauseen 2.10 *Erityisesti*-osan ja (1):n nojalla $d(a, e_m) \geqslant |d(a, e_n) - d(e_n, e_m)| = |1/2 - 1| = 1/2$, eli $e_m \notin B(a, 1/2)$.

Valitsemalla 1/3 puolikkaan tilalle voidaan vaihtoehtoisesti käyttää lausetta 2.12: koska $d(e_n, e_m) = 1$, ja $d(B(a, 1/3)) = 2/3$, eivät molemmat e_n ja e_m voi olla kuulassa $B(a, 1/3)$.

3. (11:9) Olkoon (x_n) jono avaruudessa X. Osoita, että jonon (x_n) kasautumisarvojen joukko on suljettu.

Ratkaisu. Olkoon $A = \{y \mid y \text{ on jonon } (x_n) \text{ kasautumisarvo}\}$. Todistetaan, että $X \backslash A$ on avoin. Olkoon $a \in X \backslash A$. Selvästi silloin a ei ole jonon (x_n) kasautumisarvo. Pisteellä a on siis olemassa ympäristö U, jossa on vain äärellisen monta jonon jäsentä x_n. Todistetaan, että tässä ympäristössä U ei voi olla yhtään jonon (x_n) kasautumisarvoa, eli että $U \subset X \backslash A$. Olkoon sitä varten $x \in U$ ja osoitetaan, että se ei ole kasautumisarvo. Koska U on avoin, on olemassa $r > 0$ siten että $B(x, r) \subset U$. Koska U:ssa on vain äärellisen monta jonon arvoa, niin on $B(x, r)$:ssäkin, koska ei siellä voi olla niitä enempää kuin U:ssa, koska $B(x, r) \subset U$. Näin ollen x ei ole kasautumisarvo, koska muutoin pitäisi $B(x, r)$:ssä olla äärettömästi jonon alkioita.

4. (Melkein 11:12) Oletamme että kuvausten $f_n : X \to Y$ jono suppenee pisteittäin kohti kuvausta f ja että jokainen f_n on 5-Lipschitz. Osoita, että myös f on 5-Lipschitz.

Ratkaisu. Täytyy todistaa, että jokaisella $x, y \in X$ pätee $d(f(x), f(y)) \leqslant 5d(x, y)$. Kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(y)) + d(f_n(y), f(y)).$$

ja Lipschitz-ehdosta edelleen seuraa, että

$$\leqslant d(f(x), f_n(x)) + 5d(x, y) + d(f_n(y), f(y))$$

eli

$$d(f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + 5d(x, y) + d(f_n(y), f(y)). \qquad (\circ)$$

Pistettäisestä suppenemisesta ja Lauseesta 11.3(4) seuraa, että termit $d(f_n(x), f(x))$ ja $d(f_n(y), f(y))$ menevät nollaan kun n kasvaa ja koska ($\circ$) pätee kaikilla n, saadaan, että

$$d(f(x), f(y)) \leqslant 5d(x, y),$$

(11:14) Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seuraavasti: $f(x, y) = 1$, kun $x^4 < y < x^2$ ja $f(x, y) = 0$ muuten. Todista:

5. $\lim_{z\to\bar{0}, z\in L} f(z) = 0$ kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla L,
6. $\lim_{x\to\bar{0}} f(z)$ ei ole olemassa.

Ratkaisu. Olkoon $A = \{(x, y) \mid x^4 < y < x^2\}$.

5. Käsitellään ensin tapaus kun suora ei ole koordinaattiakseli: olkoon $L = \{(x, y) \mid y = ax\}$ jollain $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Määritelmän nojalla pitää osoittaa, että jokaista pisteen $0 \in \mathbb{R}$ ympäristöä V kohti on olemassa sellainen $(0, 0)$:n ympäristö U, että $f[L \cap U] \subset V$. Olkoon V mikä tahansa 0:n ympäristö. Koska se on avoin ja sisältää 0:n, on olemassa r siten että $B(0, r) \subset V$. Määritellään $(0, 0)$:n ympäristö U seuraavasti: $U = B((0, 0), |a|)$. Nyt jos $(x, y) \in L \cap U$, niin $y = ax$ ja $|x| < |a|$, eli $|y| = |ax| = |a||x| > x^2$, eli $(x, y) \notin A$, eli $f(x, y) = 0 \in V$.
   Jos $L = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ tai $L = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, niin $L \cap A = \varnothing$, koska toisaalta A:ssa y on aina positiivinen ja toisaalta $0^4 < y < 0^2$ ei päde millään y. Täten $f(x, y) = 0$ kaikilla $(x, y) \in L$, eli erityisesti $(x, y) \in L \cap U$ missä U on mikä tahansa ympäristö, joten todistus menee kuten yllä.
6. Lauseen 11.28 nojalla raja-arvo ei ole olemassa jos ja vain jos löytyy $\mathbb{R}^2$:n jono (x_n) joka suppenee kohti origoa, mutta $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ ei ole olemassa. Olkoon x_n jono joka on määritelty seuraavasti:

$$x_{2n} = (0, 1/n)$$

   kaikilla n ja

$$x_{2n+1} = 1/n^3$$

   kaikilla n. Nyt jono suppenee kohti origoa, mutta $f(x_n)$ on 0 parillisilla n ja 1 parittomilla, joten ei suppene.
   Voi myös käyttää Lausetta 11.29 ja etsiä kaksi $\mathbb{R}^2$:n jonoa, jotka molemmat suppenevat kohti origoa, mutta joiden kuvajonot suppenevat toinen kohti nollaa ja toinen kohti ykköstä.