MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 7
Käytiin läpi pe 04.11.2011

1. Olkoon $f, g\colon X \to Y$ jatkuvia ja $A \subset X$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in A$ pätee $f(x) = g(x)$. Osoita, että jos $x \in \bar{A}$, niin $f(x) = g(x)$.

**Ratkaisu.** Seuraavassa on kaksi eri tapaa ratkaista tuo tehtävä: ensimmäinen tapa nojaa suoraan määritelmiin, jotka käytiin periodissa 1 ja toinen käyttää jonojen ominaisuuksia.

**Tapa 1.** Olkoon $x \in \bar{A}$. Oletetaan, että $x \in \bar{A}$. Tehdään vasta-oletus: $f(x) \neq g(x)$. Olkoon $\varepsilon = d'(f(x), g(x))/2$, missä $d'$ on avaruuden $Y$ metriikka. Nyt $\varepsilon > 0$, joten funktion $f$ jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta_1 > 0$ siten että

$$fB(x, \delta) \subset B(f(x), \varepsilon). \tag{1}$$

Toisaalta funktion $g$ jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta_2 > 0$ siten, että

$$gB(x, \delta) \subset B(g(x), \varepsilon). \tag{2}$$

Nyt $V = B(x, \delta_1) \cap B(x, \delta_2)$ on pisteen $x$ ympäristö (se sisältää $x$:n ja on avoin kahden avoimen joukon leikkauksena). Koska $x$ on $A$:n sulkeumassa, tämä ympäristö $V$ kohtaa $A$:n, eli on olemassa piste $x_0 \in V \cap A$. Koska $x_0 \in A$, niin oletuksen mukaan $f(x_0) = g(x_0)$. Merkitään $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Toisaalta, koska $x_0 \in B(x, \delta_1)$, niin (1):stä seuraa, että $y_0 = f(x_0) \in fB(x_0, \delta_1) \subset B(f(x), \varepsilon)$ ja koska $x_0 \in B(x, \delta_2)$, (2):sta seuraa, että $y_0 = g(x_0) \in gB(x_0, \delta_2) \subset B(g(x), \varepsilon)$. Toisin sanoin $d(y_0, f(x)) < \varepsilon$ ja $d(y_0, g(x)) < \varepsilon$. Sijoittamalla $\varepsilon$:n paikalle sen mitä se on saadaan

$$d(y_0, f(x)) < d(f(x), g(x))/2 \text{ ja } d(y_0, g(x)) < d(f(x), g(x))/2.$$

Laskemalla molemmat puolet yhteen saadaan

$$d(y_0, f(x)) + d(y_0, g(x)) < d(f(x), g(x)),$$

vaikka kolmioepäyhtälön nojalla (ehto M1) pitäisi olla

$$d(y_0, f(x)) + d(y_0, g(x)) \geqslant d(f(x), g(x)),$$

ristiriita.

**Tapa 2.** Olkoon $x \in \bar{A}$. Lauseen 11.6 nojalla on olemassa $A$:n jono $(x_n)$ joka suppenee kohti pistettä $x$. Olkoon $y_n = f(x_n)$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$ ja $z_n = g(x_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $x_n \in A$, niin oletuksen nojalla itse asiassa $y_n = z_n$ kaikilla $n$. Lauseen 11.8 ja funktioiden $f$ ja $g$ jatkuvuuden nojalla jono $y_n$ suppenee kohti pistettä $f(x)$ ja jono $z_n$ kohti pistettä $g(x)$. Koska nämä jonot ovat samat, niin Lauseen 11.4 nojalla niillä on sama raja-arvo, eli $f(x) = g(x)$.

2. Olkoon $A \subset X$ epätyhjä. Osoita, että $\bar{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

**Ratkaisu.** Jos $x \in A$, niin

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} \leqslant d(x, x) = 0,$$

koska $d(x, x)$ on joukon $\{d(x, y) \mid y \in A\}$ alkio, eli $d(x, A) = 0$, koska tällä joukolla ei ole negatiivisia alkioita. Siis $A \subset \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

Oletetaan sitten, että $x \in \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$, eli $d(x, A) = 0$. Osoitetaan, että jokainen $x$:n ympäristö kohtaa $A$:n, mistä seuraa määritelmän nojalla, että $x \in \bar{A}$. Olkoon $U$ mikä tahansa pisteen $x$ ympäristö. Koska $U$ on avoin, on olemassa $r$ siten että $B(x, r) \subset U$. Koska $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} = 0$, joukossa $\{d(x, y) \mid y \in A\} = 0$ on mielivaltaisen pieniä lukuja, eli muun muassa lukuja, jotka ovat pienempiä kuin $r$. Toisin sanoin jollain $y \in A$ pätee $d(x, y) < r$. Mutta tämähän tarkoittaa täsmälleen sitä, että $y \in B(x, r) \subset U$ ja koska $y \in A$, seuraa tästä, että $y \in U \cap A$. Siis $U$ kohtaa $A$:n.

3. Osoita, että jokainen äärellinen osajoukko $A \subset X$ on suljettu. Osoita, että jos $X$ on äärellinen, niin sen kaikki osajoukot ovat avoimia.

**Ratkaisu.** Olkoon $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ äärellinen joukko. Todistetaan, että sen komplementti on avoin. Olkoon $x \in X \setminus A$. Nyt jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $x \neq a_i$, eli $r_i = d(x, a_i) > 0$. Olkoon $r$ pienin näistä luvuista $r_1, \ldots, r_n$. Silloin $r > 0$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, n\}$ pätee $a_i \notin B(x, r)$, eli $B(x, r) \subset X \setminus A$. Näin mielivaltaiselle $x \in X \setminus A$ löydettiin ympäristö, joka sisältyy joukkoon $X \setminus A$, eli se on avoin, joten sen komplementti $X \setminus (X \setminus A) = A$ on suljettu.

Olkoon $X$ äärellinen avaruus ja $A \subset X$. Koska $X \setminus A \subset X$, pätee $\#(X \setminus A) \leqslant \#X$, eli myös $X \setminus A$ on äärellinen. Edellisen nojalla se on siis suljettu, eli sen komplementti $X \setminus (X \setminus A) = A$ on avoin. Katso myös kirjasta 3.12.

4. (11:1) Oletetaan, että $(x_n)$ ja $(y_n)$ ovat jonoja ja että $x_n \to a$ ja $y_n \to b$. Osoita, että $d(x_n, y_n) \to d(a, b)$ suoraan kolmioepäyhtälön avulla.

**Ratkaisu.** Kolmioepäyhtälöstä (metriikan ehto M1) saadaan

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, a) + d(a, y_n) \leqslant d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n)$$
$$\iff d(x_n, y_n) - d(a, b) \leqslant d(x_n, a) + d(b, y_n) \qquad (1)$$

ja vastaavalla tavalla saadaan

$$d(a, b) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, b) \leqslant d(a, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b)$$
$$\iff d(a, b) - d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, a) + d(b, y_n). \qquad (2)$$

Yhdistämällä (1) ja (2) saadaan

$$|d(x_n, y_n) - d(a, b)| \leqslant d(x_n, a) + d(b, y_n).$$

Koska Lauseen 11.3 nojalla epäyhtälön oikea puoli lähestyy nollaa, saadaan, että myös vasen puoli lähestyy nollaa. Tämän tarkistaminen onnistuu Analyysi I:n tiedoilla.

5. (a) Osoita, että jokainen luonnollinen luku $n$ voidaan yksikäsitteisesti esittää muodossa

$$n = 2^{n_1}(2n_2 - 1),$$

missä $n_1$ on luonnollinen luku tai nolla ja $n_2$ luonnollinen luku ($> 0$). (b) (11:3) Olkoon $x_n = \frac{n_1}{n_2}$, missä $n_1$ ja $n_2$ ovat näin määriteltyjä lukuja. Osoita, että jokainen epänegatiivinen reaaliluku on jonon $(x_n)$ kasautumispiste.

**Ratkaisu.** (a) Todistetaan väite induktiolla luvun $n$ suhteen. Kun $n = 1$, valitaan $n_1 = 0$ ja $n_2 = 1$. Selvästi tällöin $1 = 2^{n_1}(2n_2 - 1)$ ja esitys on yksikäsitteinen. Oletetaan, että väite on todistettu kaikilla $k < n$. Jos $n$ on pariton, niin induktio-oletusta ei edes tarvita: valitaan $n_1 = 0$ ja $n_2 = m$, missä $m$ on sellainen että $n = 2m - 1$. Tällainen on aina yksikäsitteisesti olemassa, kun $n$ on pariton. Jos $n$ on parillinen, niin jollain $m < n$ pätee $n = 2m$. Induktio-oletuksesta seuraa, että on olemassa yksikäsitteiset $m_1$ ja $m_2$ siten että $m = 2^{m_1}(2m_2 - 1)$. Nyt $n = 2m = 2^{m_1+1}(2m_2 - 1)$, eli voidaan asettaa $n_1 = m_1 + 1$ ja $n_2 = m_2$. Yksikäsitteisyys seuraa siitä, että jos $n = 2^{n_1'}(2n_2' - 1)$, niin $m = 2^{n_1'-1}(2n_2' - 1)$, jolloin induktio-oletuksesta saadaan $n_1' - 1 = m_1$ ja $n_2' = m_2$, eli $n_1' = n_1$ ja $n_2' = n_2$.

(b) Osoitetaan, että $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}_+ = \{p \in \mathbb{Q} \mid p \geqslant 0\}$. Jos $p \in \mathbb{Q}_+$, niin joko $p = 0$ tai on olemassa luonnolliset luvut $n_1$ ja $n_2$ siten että $p = n_1/n_2$. Jos $p = 0$, olkoon $n = 1$ ja jos $p > 0$, olkoon $n = 2^{n_1}(2n_2 - 1)$. Esityksen yksikäsitteisyydestä nyt seuraa, että $x_n = p$, eli $\mathbb{Q}_+ \subset \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Toisaalta jokainen jonon jäsen $x_n$ on triviaalisti joukossa $\mathbb{Q}_+$, eli $\mathbb{Q}_+ = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Olkoon $x \geqslant 0$ mikä tahansa reaaliluku. Osoitetaan, että $x$ on jonon kasautumisarvo. Olkoon $\varepsilon > 0$. Riittää osoittaa, että joukossa $B(x, \varepsilon)$ on äärettömän monta jonon $(x_n)$ jäsentä. Mutta joukko $B(x, \varepsilon) = ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ on avoin väli, joten siellä on äärettömän monta positiivista rationaalilukua, eli jonon jäsentä!

6. Osoita, että (a) avaruudessa $X$ on olemassa suppeneva jono jos ja vain jos $X \neq \varnothing$ ja (b) avaruudessa $X$ on olemassa hajaantuva jono jos ja vain jos $\#X \geqslant 2$.

**Ratkaisu.** (a) Jos $X$:ssä ei ole alkioita, niin ei siellä voi olla jonoakaan. Toisaalta jos $X$:ssä on edes yksi alkio $x \in X$, niin jono $(x, x, x, x, \dots)$ suppenee kohti pistettä $x$, eli silloin $X$:ssä on olemassa suppeneva jono.

(b) Jos $X$:ssä ei ole alkioita, eli $\#X = 0$, niin siinä ei voi olla jonoa, eli ei myöskään hajaantuvaa jonoa. Jos $\#X = 1$, eli $X = \{x\}$ ja $(x_n)$ on jono $X$:ssä, niin väistämättä $x_n = x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, jolloin jono suppenee kohti pistettä $x$, eli taaskaan ei voi olla hajaantuvaa jonoa. Näin saatiin toinen suunta: jos $\#X < 2$, niin hajaantuvaa jonoa ei ole. Toisaalta jos $\#X \geqslant 2$, niin on $X$:ssä on olemassa pisteet $z_1$ ja $z_2$, joille $z_1 \neq z_2$. Muodostetaan jono $x_n = z_1$ kun $n$ on pariton ja $x_n = z_2$ kun $n$ on parillinen. Tämä jono selvästi hajaantuu.

7. Olkoon $x_n = \sin(n\pi/2)$. Etsi jonosta $(x_n)$ kolme suppenevaa osajonoa, jotka suppenevat kaikki kohti eri arvoja. Onko jonolla $(x_n)$ muita suppenevia osajonoja?

**Ratkaisu.** Olkoon $k_n = 2n$, $m_n = 3n + 2$ ja $l_n = 3n$. Nyt $x_{k_n} = \sin(2n\pi/2) = \sin(n\pi) = 0$ on vakiojono, eli suppenee kohti lukua 0, $x_{m_n} = \sin((3n + 2)\pi/2) = \sin((3n\pi/2 + \pi) = \sin(\pi/2) = 1$ on vakiojono, eli suppenee kohti lukua 1, $x_{l_n} = \sin(3n\pi/2) = \sin(3\pi/2) = -1$ on vakiojono, eli suppenee kohti lukua $-1$.

Jonolla ei ole muita kasautumisarvoja kuin $-1, 0$ ja 1, mutta sillä on muitakin suppenevia osajonoja, esimerkiksi $x_{600n}$. Nyt $x_{600n} = \sin(600n\pi/2) = \sin(300n\pi) = 0$.