MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 6
Käytiin läpi pe 14.10.2011

1. (6.13) Osoita, että $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x \leqslant y \leqslant e^x\}$ on suljettu tasossa. Onko A rajoitettu?

   Ratkaisu. Olkoon $f(x, y) = e^x - y$ ja $g(x, y) = \sin x - y$. Helposti nähdään, että

   $$A = \{(x, y) \mid 0 \leqslant f(x, y)\} \cap \{(x, y) \mid g(x, y) \leqslant 0\}.$$

   Tämä voidaan kirjoittaa alkukuvina seuraavasti:

   $$A = f^{-1}[0, \infty[\cap g^{-1}] - \infty, 0].$$

   f ja g ovat jatkuvia, koska ne ovat yhdisteitä polynomeista, eksponenttifunktiosta ja sinifunktiosta. Lauseen 6.13 nojalla suljetun joukon alkukuva on suljettu jatkuvassa kuvauksessa ja lauseen 6.3 nojalla niiden leikkaus on suljettu. Siis A on suljettu.

2. (6:15) Osoita, että kuvaus $f : X \to Y$ on jatkuva jos ja vain jos $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$ kaikilla joukoilla $B \subset Y$.

   Ratkaisu. Oletetaan, että f on jatkuva. Silloin $f^{-1}\bar{B}$ on suljetun joukon alkukuvana suljettu (6.13). Toisaalta $B \subset \bar{B}$, mistä seuraa $f^{-1}B \subset f^{-1}\bar{B}$ (todista). Lauseen 6.8(3) nojalla tästä seuraa, että $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\bar{B}$.

   Oletetaan, että $\overline{f^{-1}B} \subset f^{-1}\overline{B}$ kaikilla joukoilla $B \subset Y$. Riittää osoittaa, että jokaisen suljetun joukon alkukuva on suljettu. Siitä seuraa lauseen 6.13 nojalla, että f on jatkuva. Olkoon C maalijoukon suljettu osajoukko. Silloin erityisesti $\bar{C} = C$ (lause 6.8). Nyt oletuksen nojalla

   $$\overline{f^{-1}C} \subset f^{-1}\bar{C} = f^{-1}C. \tag{1}$$

   Toisaalta jokainen joukko sisältyy omaan sulkeumaansa, siis

   $$f^{-1}C \subset \overline{f^{-1}C}. \tag{2}$$

   Kohdista (1) ja (2) seuraa, että $f^{-1}C = \overline{f^{-1}C}$, eli joukko on oma sulkeumansa, eli suljettu (Lause 6.8(6)). Saatiin, että mielivaltaisen suljeutun joukon C alkukuva on suljettu.

3. (6:11a) Osoita, että jatkuvan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja on suljettu joukko tasossa.

Ratkaisu. Olkoon $g(x,y) = f(x) - y$. Funktio g on yhdiste funktiosta f ja polynomifunktiosta $(z,y) \mapsto z - y$, eli on itsekin jatkuva. Funktion f kuvaaja on joukko

$$\begin{aligned}
\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} &= \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) - y = 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, g(x,y) = 0\} \\
&= g^{-1}\{0\}.
\end{aligned}$$

Kuvaaja on siis joukon $\{0\}$ alkukuva jatkuvassa kuvauksessa g. Lauseen 6.13 nojalla se on suljettu mikäli $\{0\}$ on suljettu. Osoitetaan yleisemmin, että yksiö on aina suljettu metrisessä avaruudessa. Olkoon $x \in X$ jossain metrisessä avaruudessa (X,d). Jos $y \notin \{x\}$, niin $y \neq x$, eli $d(y,x) > 0$. Mutta nyt $B(y, d(y,x))$ on pisteen y ympäristö, joka ei sisällä pistettä x. Näin jokaiselle pisteelle joukon $\{x\}$ komplementissa löydetään ympäristö, joka sisältyy siihen komplementtiin. Komplementti on siis avoin ja yksiö suljettu.

4. (4:5) Olkoon kuvaus $f\colon X \to Y$ M-Lipschitz ja $g\colon Y \to Z$ N-Lipschitz. Osoita, että kuvaus $g \circ f$ on MN-Lipschitz.

Ratkaisu. Olkoon d metriikka X:ssä, d' metriikka Y:ssä ja d'' metriikka Z:ssa. Se että f on M-Lipschitz, tarkoittaa sitä, että kaikilla $x_1, x_2 \in X$,

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant Md(x_1, x_2) \tag{1}$$

ja se että g on N-Lipschitz, tarkoittaa sitä, että kaikilla $y_1, y_2 \in Y$,

$$d''(g(y_1), g(y_2)) \leqslant Nd'(x_1, x_2). \tag{2}$$

Tutkitaan yhdistettyä funktiota $g \circ f$. Olkoon $x_1, x_2 \in X$. Nyt sijoittamalla epäyhtälöön (2) $y_1 = f(x_1)$ ja $y_2 = f(x_2)$, saadaan

$$d''(g(f(x_1)), g(f(x_2))) \leqslant Nd'(f(x_1), f(x_2))$$

ja edelleen soveltamalla yhtälöä (1) saadaan

$$Nd'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant NMd(x,y)$$

ja yhdistämällä nämä, saadaan

$$d''((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) \leqslant NMd(x_1, x_2)$$

eli täsmälleen ehto sille, että $g \circ f$ on NM-Lipschitz.

5. (4:2) Anna esimerkki jatkuvasta funkiosta $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ joka ei ole Lipschitz.

Ratkaisu. Esimerkiksi $\sqrt{x}$, mutta mikä tahansa muukin funktio, jonka derivaatta on rajoittamaton kelpaa. Tehdään vastaoletus, että $\sqrt{x}$ on M-Lipschitz jollakin M. Valitaan $x_1 = 0$ ja $x_2 = M^{-4}$. Nyt

$$d(f(x_1), f(x_2)) = |0-\sqrt{M^{-4}}| = M^{-2} > M^{-3} = M\cdot|0-M^{-4}| = M|x_1-x_2| = Md(x_1, x_2),$$

eli tiivistettynä

$$d(f(x_1), f(x_2)) > d(x_1, x_2),$$

mikä on suoraan Lipschitz ehdon negaatio, mikä on ristiriita.

6. Olkoon $A \subset X$ epätyhjä ja $r > 0$. Osoita, että $B(A, r) = \{x \mid d(x, A) < r\}$ on avoin ja $\bar{B}(A, r) = \{x \mid d(x, A) \leqslant r\}$ on suljettu.

Ratkaisu. Olkoon $f \colon X \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x) = d(x, A)$. Luennolla (ja kirjassa) on todistettu, että f on jatkuva. Nyt $B(A, r) = f^{-1}]-\infty, r[$ ja $\bar{B}(A, r) = f^{-1}]-\infty, r]$. Ensimmäinen on siis avoimen joukon alkukuva ja toinen suljetun joukon alkukuva. Ne ovat vastaavasti avoin ja suljettu lauseiden 4.8 ja 6.13 nojalla.