MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 5
Käytiin läpi pe 07.10.2011

1. Osoita, että $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Anna esimerkki avoimesta tiheästä osajoukosta $A \subset \mathbb{R}$, joka ei kuitenkaan ole koko $\mathbb{R}$, eli $A \neq \mathbb{R}$.

   Ratkaisu. Olkoon $x \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Riittää näyttää, että $B(x, r) \cap \mathbb{Q}$ on epätyhjä, koska tästä seuraa, että jokainen x:n ympäristö kohtaa $\mathbb{Q}$:n, eli $x \in \bar{\mathbb{Q}}$. Tässä voidaan vedota joko Analyysi I:n tulokseen, että jokaisella avoimella välillä on rationaalilukuja, eli niitä on myös joukossa $B(x, r) =]x - r, x + r[$, tai voidaan todistaa suoraan: olkoon $a_0, a_1 a_2 \ldots$ luvun x desimaalikehitelmä, missä $a_0 \in \mathbb{Z}$ ja $a_i \in \{0, \ldots, 9\}$. Olkoon $n > 1/r$. Nyt katkaisemalla desimaalikehitelmä vaiheesta n, saadaan rationaaliluku $q = a_0, a_1 \ldots a_n$, jonka etäisyys x:stä on pienempi tai yhtäsuuri kuin $10^{-n} < 1/n < r$, eli $q \in B(x, r) \cap \mathbb{Q}$

2. Olkoon $X = \mathbb{Q}$ varustettuna Euklidisella metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Onko C suljettu ja/tai avoin kun

   (a) $C = \{x \mid 0 < x < 2\}$
   (b) $C = \{x \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$
   (c) $C = \{x \mid 0 \leqslant x\}$
   (d) $C = \{x \mid 0 \leqslant x < 1\}$

   Varusta vastaukset todistuksilla.

   Ratkaisu. (a) C on avoin mutta ei suljettu. Olkoon $x \in C$ ja olkoon $r = \min\{x, 2 - x\}$. Nyt selvästi $B(x, r) \subset C$. Koska x oli mielivaltainen, seuraa tästä, että C on avoin. Osoitetaan, että C:n komplementti ei ole avoin: Jos $r > 0$ on mielivaltainen, niin $B(0, r)$ sisältää positiivisia lukuja, jotka ovat pienempiä kuin 2, eli 0:lla ei ole ympäristöä, joka sisältyisi joukkoon $\mathbb{Q} \setminus C$. Siis C ei ole suljettu.

   (b) C on avoin ja suljettu. Jos $x \in C$, niin kuten kohdassa (a) valitaan $r = \min\{d(x, -\sqrt{2}), d(x, \sqrt{2})\}$, jolloin $B(x, r) \subset C$. Tästä seuraa, että C on avoin. Olkoon $x \in \mathbb{Q} \setminus C$. Koska $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku, on $x \notin \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Luku $r = \min\{d(x, -\sqrt{2}), d(x, \sqrt{2})\}$ on siis positiivinen ja $B(x, r) \subset \mathbb{Q} \setminus C$.

   (c) C on suljettu mutta ei avoin. C:n komplementti koostuu kaikista negatiivisista rationaaliluvuista. Jos $x \in \mathbb{Q} \setminus C$, niin $B(x, |x|) \subset \mathbb{Q} \setminus C$, joten $\mathbb{Q} \setminus C$ on avoin ja C on suljettu. Toisaalta jokainen 0:n ymäpristö sisältää negatiivisia lukuja, jotka eivät siis ole C:ssä, joten C ei ole avoin.

(d) C ei ole suljettu eikä avoin. Jokainen 0:n ympäristö sisältää negatiivisia lukuja, jotka eivät ole C:ssä, vaikka $0 \in C$, joten C ei ole avoin. Toisaalta jokainen 1:n ympäristö sisältää positiivisia lukuja, jotka ovat pienempiä kuin 1 ja siis ovat C:ssä. Siispä C:n komplementti ei ole avoin eikä C ole siis suljettu.

3. Olkoon $\mathrm{pr}_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ projektiofunktio $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_j$, missä $1 \leqslant j \leqslant n$. Osoita, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on avoin, niin $\mathrm{pr}_j A \subset \mathbb{R}$ on avoin.

Ratkaisu. Olkoon $y \in \mathrm{pr}_j A$. Silloin $y = \mathrm{pr}_j(x_1, \ldots, x_n)$ jollain $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ ja $y = x_j$. Koska A on avoin, on olemassa $r > 0$ niin että $B(x, r) \subset A$. Siispä $\mathrm{pr}_j B(x, r) \subset A$ ja toisaalta $y = \mathrm{pr}_j(x) \in \mathrm{pr}_j B(x, r)$, joten riittää osoittaa, että $\mathrm{pr}_j B(x, r)$ on itse asiassa avoin kuula: $\mathrm{pr}_j B(x, r) = B(x_j, r)$, sillä silloin pisteelle y on löydetty kuulaympäristö, joka sisältyy joukkoon $\mathrm{pr}_j A$. Tutkitaan tätä joukkoa:

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}_j B(x,r) &= \{\mathrm{pr}_j(z) \mid z \in B(x,r)\} \\
&= \{\mathrm{pr}_j(z) \mid d(z,x) < r\} \\
&= \{z_j \mid \sqrt{(z_1 - x_1)^2 + \cdots + (z_n - x_n)^2} < r\} \\
&= \{z_j \mid (z_1 - x_1)^2 + \cdots + (z_n - x_n)^2 < r^2\} \\
&\overset{*}{=} \{z_j \mid (z_j - x_j)^2 < r^2\} \\
&= \{z_j \mid d(z_j, x_j) < r\} \\
&= B(x_j, r).
\end{aligned}$$

Yhtälö $*$ pätee, koska: jos $(z_j - x_j) < r^2$, niin valitsemalla $z_i = x_i$ kaikilla $i \neq j$, saadaan, että $(z_1 - x_1)^2 + \cdots + (z_n - x_n)^2 < r^2$. Toisaalta jos jälkimmäinen pätee, niin koska kaikki summan termit ovat positiivisia, selvästi pätee myös $(z_j - x_j) < r^2$.

4. Osoita, että jos jokaisella $i \in \{1, \ldots, n\}$ funktiot $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, niin $h \colon X \to \mathbb{R}^n$, $h(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ on jatkuva.

Ratkaisu. Komponenttifunktioista $h_i = \mathrm{pr}_i \circ h = f_i$ tiedetään että ne ovat jatkuvia, joten luennolla 29.09.2011 todistetun lauseen (Lause 5 muistiinpainoissa, Lause 5.9 kirjassa) nojalla h on jatkuva.

5. Todista, että tulofunktio $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ on jatkuva kun $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

Ratkaisu. Tehtävässä sai käyttää sitä, että kahden muuttujan tulo $T \colon (x, y) \mapsto xy$ on jatkuva. Todistetaan väite kaikille $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N} \sup\{0\}$ (kurssin sopimus on että $0 \notin \mathbb{N}$), jolloin varsinainen väite tietenkin seuraa. Olkoon $k_1 + \cdots + k_n = 0$.

Silloin yllä määritelty f on vakiofunktio $f(x) = 1$, joten se on jatkuva, koska jokaisen avoimen joukon alkukuva joko tyhjä tai koko avaruus, eli avoin. Tehdään induktio-oletus, että väite pätee aina, kun $k_1 + \cdots + k_n = m$ ja todistetaan se tapauksessa $k_1 + \cdots + k_n = m + 1$. Nyt jollain i on oltava $k_i > 0$, koska $m + 1 > 0$. Funktio voidaan kirjoittaa siis muodossa

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} = x_i \cdot (\underbrace{x_1^{k_1} \cdots x_i^{k_i - 1} \cdots x_n^{k_n}}_{g(x_1, \dots, x_n)}).$$

Tiedetään, että yllä esiintyvä g on jatkuva induktio-oletuksen nojalla. Koska myös projektio pr_i on jatkuva, on edellisen tehtävän nojalla funktio

$$h \colon (x) \mapsto (\mathrm{pr}_i(x), g(x))$$

jatkuva. Toisaalta helposti nähdään, että $f = T \circ h$, joka on jatkuvien kuvausten yhdistettynä kuvauksena jatkuva (Lause 4.12).

6. Osoita, että kaikki polynomit ovat jatkuvia funktioita.

Ratkaisu. Kun sovelletaan muuttujiin $x_1, \dots, x_{10}$ kerto- ja yhteenlaskua, voi tulokseksi tulla jotain tällaista:

$$(x_1 x_5 + 7x_2^9 + 4(x_1 + 2x_5))^2 + (x_4^{72} x_{10}^3 + 54)(x_2 x_3^3 x_6 + 2).$$

Kuitenkin reaalilukujen distributiivisuuslain $x(y + z) = xy + xz$ avulla voidaan kaikki sulut aina avata (helppo induktio sulkujen lukumäärän suhteen). Jäljelle jää aina summa termeistä, joiden jatkuvuus todistettiin edellisessä tehtävässä. Jokainen polynomi $P \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on siis muotoa

$$\sum_{i=1}^{m} Q_i(x_1, \dots, x_n),$$

missä $Q_i(x_1, \dots, x_n) = x_1^{k_1^i} \cdots x_n^{k_n^i}$. Olkoon $S \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ summafunktio

$$(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} y_i.$$

Tämän jatkuvuus todistettiin luennolla 29.09. Mutta nyt

$$P(x) = S(Q_1(x), \dots, Q_m(x)) = S(Q(x)),$$

missä $Q(x) = (Q_1(x), \dots, Q_m(x))$. Funktio $x \mapsto Q(x)$ on jatkuva tehtävän 3 nojalla joten P on jatkuva kahden jatkuvan funktion yhdistettynä kuvauksena.