MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 4
Käytiin läpi pe 30.09.2011

1. Olkoon $X = \mathbb{R}$ varustettuna Euklidisella metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Onko $A \subset \mathbb{R}$ avoin joukko kun

   (a) $A = \{x \mid x < 0\}$,

   (b) $A = \{x \mid a < x < b\}$, missä $a < b$ ovat reaalilukuja,

   (c) $A = \mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko,

   (d) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

   Todista väitteesi suoraan avoimen joukon määritelmästä (3.1).

   **Ratkaisu.** (a) Joukko on avoin. Todistus: olkoon $x \in A$ ja valitaan $r = |x|$. Silloin selvästi $B(x, r) = ]x - r, x + r[ \subset A$. Jokaisella $A$:n pisteellä on siis ympäristö joka sisältyy $A$:han, eli $A$ on määritelmän mukaan avoin.

   (b) Joukko on avoin. Jos $x \in A$, niin valitaan $r = \min\{|x - a|, |x - b|\}$. Joukon $A$ määrittelystä seuraa, että $r > 0$ ja $B(x, r) = ]x - r, x + r[ \subset A$

   (c) $\mathbb{Q}$ ei ole avoin. Tämän osoittamiseksi on löydettävä joku luku joukossa $\mathbb{Q}$, jonka kaikki ympäristöt sisältävät irrationaalilukuja (= jotain muuta kuin rationaalilukuja). Tähän itse asiassa kelpaa mikä tahansa reaaliluku $p$: jos $p \in \mathbb{Q}$ ja $r > 0$ on mielivaltainen, niin $p + \frac{\sqrt{2}}{n}$ on irrationaaliluku, joka on kuulassa $B(p, r)$ kunhan $n$ on tarpeeksi suuri (esimerkiksi niin suuri, että $\frac{2}{n} < r$, jolloin $p < p + \frac{\sqrt{2}}{n} < p + \frac{2}{n} < p + r$).

   (d) Ei ole avoin. Taas riittää löytää yksikin piste, jonka mikään ympäristö ei sisälly $A$:han. Esimerkiksi $1 \in A$, mutta mikään $x > 1$ ei ole $A$:ssa, joten kaikilla $r > 0$ pätee $B(1, r) \not\subset A$, koska $1 < 1 + \frac{r}{2} \in B(1, r)$.

2. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja varustettuna Euklidisella metriikalla $d(x, y) = |x - y|$. Onko $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin joukko kun

   (a) $A = \{(x, y) \mid x^2 < y^3 - xy\}$,

   (b) $A = \{(x, y) \mid 0 < x < 1\}$,

   (c) $A = \{(x, y) \mid xy = 0\}$?

**Ratkaisu.** (a) Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla $f(x) = x^2 - y^3 + xy$. $f$ on polynomi, joten se on jatkuva. Mutta

$$A = \{(x,y) \mid x^2 < y^3 - xy\} = \{(x,y) \mid x^2 - y^3 + xy < 0\} = f^{-1}\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Tehtävässä 1 nähtiin, että $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ on avoin, ja koska $f$ on jatkuva, sen alkukuva on avoin. Siis $A$ on avoin.

(b) Projektiofunktio $\mathrm{pr}_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in määritelty kaavalla $\mathrm{pr}_1(x,y) = x$. Se on jatkuva lauseen 5.6 nojalla. Toisaalta $\{(x,y) \mid 0 < x < 1\} = \{(x,y) \mid 0 < \mathrm{pr}_1(x,y) < 1\} = \{(x,y) \mid \mathrm{pr}_1(x,y) \in \,]0,1[\} = (\mathrm{pr}_1)^{-1}\,]0,1[$. Koska avoin väli $]0,1[$ on avoin jokukko ja $\mathrm{pr}_1$ on jatkuva, on $A$ avoimen joukon alkukuvana avoin.

Tehtävän voi myös ratkaista käyttämällä muita keinoja, kuten lausetta 3.4 tai suoraan avoimen joukon määritelmää. Eräs tällainen ratkaisu nähtiin laskuharjoitustilaisuudessa perjantaina.

(c) Nyt $A$ ei ole avoin. Selvästi esimerkiksi $(0,0) \in A$. Kuitenkin jos $r > 0$ on mielivaltainen, niin $(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) \in B((0,0), r)$, mutta $(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) \notin A$, koska $\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{r^2}{4} > 0$.

3. (3:10) Metrisen avaruuden $(X,d)$ pistettä $a \in X$ kutsutaan *erakkopisteeksi*, jos on olemassa reaaliluku $r > 0$ siten että $B(a,r) = \{a\}$. Osoita, että metrisen avaruuden erakkopisteiden joukko on avoin.

**Ratkaisu.** Merkitään erakkopisteiden joukkoa $E$:llä. Jokaista erakkopistettä $e \in E$ kohti olkoon $r_e$ sellainen positiivinen reaaliluku, että $B(e, r_e) = \{e\}$. Lauseen 3.2 nojalla joukot $B(e, r_e)$ ovat avoimia kaikilla $e \in E$. Toisaalta saadaan, että $E$ on yhdistse näistä avoimista kuulista:

$$E = \bigcup_{e \in E} \{e\} = \bigcup_{e \in E} B(e, r).$$

Lauseen 3.4 nojalla avointen joukkojen yhdiste on avoin, joten $E$ on avoin.

4. Olkoon $X = \mathbb{Q}$ rationaalilukujen joukko varustettuna Euklidisella metriikalla. Olkoon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ määritelty seuraavalla tavalla: $f(x) = -1$, kun $x < \sqrt{2}$ ja $f(x) = 1$, kun $x > \sqrt{2}$. Osoita, että $f$ on jatkuva. (Maalijoukossa myös Euklidinen metriikka)

**Ratkaisu.** Lauseen 4.8 nojalla riittää osoittaa, että jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin. Olkoon $U \subset \mathbb{R}$ avoin. Tehtävä jakautuu neljään tapaukseen:

(i) $1 \in U$ ja $-1 \in U$. Silloin $f^{-1}U = \mathbb{Q}$, koska kaikki pisteet kuvautuvat joko $(-1)$:lle tai 1:lle.

(ii) $1 \in U$ ja $-1 \notin U$. Silloin $f^{-1}U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$, koska kaikki pisteet $> \sqrt{2}$ kuvautuvat 1:lle, eli $U$:hun, mutta muut pisteet kuvautuvat $(-1)$:lle, eli $U$:n ulkopuolelle.

(iii) $1 \notin U$ ja $-1 \in U$. Silloin $f^{-1}U = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\}$, koska kaikki pisteet $< \sqrt{2}$ kuvautuvat 1:lle, eli $U$:hun, mutta muut pisteet kuvautuvat $(-1)$:lle, eli $U$:n ulkopuolelle.

(iv) $1 \notin U$ ja $-1 \notin U$. Silloin $f^{-1}U = \varnothing$, koska yksikään piste ei tällöin kuvaudu joukkoon $U$.

Tapauksessa (i) alkukuva on koko avaruus $\mathbb{Q}$, eli se on avoin. Tapauksessa (ii), $f^{-1}U\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$ on avoin, koska jos $y \in f^{-1}U$, niin valitaan $r = |y - \sqrt{2}|$. Nyt $B(y, r) = \{z \in \mathbb{Q} \mid |z - y| < r\}$ on avoin kuula, joka sisältyy joukkoon $f^{-1}U$. Samalla tavalla nähdään, että tapauksessa (iii) $f^{-1}U$ on avoin. Tapauksessa (iv) alkukuva on taas avoin, koska tyhjä joukko on avoin joukko (ks. kirjan huomautus kohdassa 3.1).

5. (4:9) Olkoon $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty yhtälöllä $f(x) = x^2$. Onko $f$ jatkuva, kun

   (a) lähdössä on tavallinen (Euklidinen) metriikka ja maalissa $\{0, 1\}$-metriikka,

   (b) metriikat ovat päinvastoin kuin (a)-kohdassa.

**Ratkaisu.** (a) Olkoon $U = \{4\}$. Maalijoukossa $U = B(4, 1)$ on avoin kuula, eli avoin. Kuitenkin $f^{-1}U = \{-2, 2\}$ ei ole avoin lähtöjoukossa, koska pisteen 2 kaikki $r$-säteiset kuulaympäristöt sisältävät luvun $2 + r/2 \notin f^{-1}U$. Avoimen joukon $U$ alkukuva ei ole avoin, joten $f$ ei voi olla jatkuva Lauseen 4.8 nojalla.

(b) Olkoon $U \subset \mathbb{R}$ mikä tahansa avoin joukko maalijoukossa. Nyt $f^{-1}U$ on lähtöjoukon osajoukko ja lähtöjoukossa on $\{0, 1\}$-metriikka. Tässä metriikassa kaikki pisteet ovat erakkopisteitä, joten mm. $f^{-1}U$ koostuu erakkopisteistä. Nyt samalla päättelyllä kuin tehtävän 3 ratkaisussa nähdään, että $f^{-1}U$ on avoin. Itse asiassa jokainen funktio, jonka lähtöavaruus on diskreetti (= kaikki pisteet erakkopisteitä) on jatkuva.

6. (3:2) Olkoon $A \subset \mathbb{R}^2$ avoin ja $z \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Voiko $A \cup \{z\}$ olla avoin? (Euklidinen metriikka.)

**Ratkaisu.** Voi. Olkoon $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Nyt $A$ on avoin, koska jos $x \in A$, niin valitsemalla $r = d(x, (0, 0))$ saadaan kuula $B(x, r) \subset A$. Toisaalta $A \cup \{z\} = \mathbb{R}^2$ on avoin koska se on koko avaruus.