MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 3
Käytiin läpi pe 23.09.2011

1. Olkoon $X = \mathbb{R}^2$ ja $d(x, y) = |x - y|$ tavallinen Euklidinen metriikka. Määritä

(a) $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} B((k, 0), k)$,

(b) $\displaystyle\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} B(x, 1)$,

(c) $\displaystyle\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \bigcup_{m=1}^{\infty} B\big((x, 0), \frac{1}{m}\big)$,

(d) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} B\big((\frac{1}{m}, 0), \frac{1}{m}\big)$,

(a) Olkoon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Onko olemassa luonnollista lukua n siten että piste (x, y) kuuluu kuulaan $B((n, 0), n)$? Tapaus 1: $x > 0$. Olkoon n jokin luonnollinen luku. Nyt

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in B((n, 0), n) \\
\iff\ & d((x, y), (n, 0)) < n \\
\iff\ & \sqrt{(n - x)^2 + y^2} < n \\
\iff\ & (n - x)^2 + y^2 < n^2 \\
\iff\ & n^2 - 2nx + x^2 + y^2 < n^2 \\
\iff\ & n > \frac{x^2 + y^2}{2x}
\end{aligned}$$

Siispä jos valitaan n sopivan suureksi: $n > \frac{x^2+y^2}{2x}$, niin $(x, y) \in B((n, 0), n)$. Koska oletuksena oli vain että $x > 0$, seuraa tästä, että avoin puolitaso $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ sisältyy joukkoon

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B((n, 0), n).$$

Tapaus 2: $x \leqslant 0$. Nyt $d((x, y), (n, 0)) \geqslant d((x, 0), (n, 0)) = n + |x| > n$, eli $(x, y) \notin B((n, 0), n)$. Tästä seuraa, että puolitason $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ulkopuolella mikään piste ei kuulu joukkoon $\bigcup_{n=1}^{\infty} B((n, 0), n)$, vastaukseksi siis saadaan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B((n, 0), n) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}.$$

(b) Väite: $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} B(x, 1) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Merkitään $A = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} B(x, 1)$. Todistetaan ensin, että $0 \notin A$ Vasta-oletus: $0 \in A$. Tästä seuraa, että jollain $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$, $0 \in B(y, 1)$. Jälkimmäinen tarkoittaa, että $d(0, y) < 1$, mutta y:n valinnasta seuraa, että $d(0, y) \geqslant 1$, ristiriita.

Siis $0 \notin \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} B(x,1)$, eli

$$A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Oletetaan sitten että $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tapaus 1: $|y| \geqslant 1$. Mutta silloin $B(y,1) \subset A$, eli $y \in A$. Tapaus 2: $|y| < 1$. Olkoon $v = \frac{y}{|y|}$ (huom $y \neq 0$). Nyt $|v| = |\frac{y}{|y|}| = \frac{|y|}{|y|} = 1$, eli $v \notin B(0,1)$. Toisaalta $d(v,y) = d(\frac{y}{|y|}, y) = |\frac{y}{|y|} - y| = |(\frac{1}{|y|} - 1)y| = |(\frac{1}{|y|} - 1)||y| = |1 - |y||$. Viimeinen luku on pienempi kuin 1, koska oletuksen mukaan $|y| < 1$. Siispä $y \in B(v,1)$ ja koska $v \notin B(0,1)$, on $y \in A$. Eli

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \subset A.$$

(c) Siitä, että $\max\{\frac{1}{m} \mid m \in \mathbb{N}\} = 1$, saadaan, että jokaisella $m \in \mathbb{N}$ pätee $B((x,0), \frac{1}{m}) \subset B((x,0),1)$ ja yhtäsuuruus pätee kun $m = 1$. Siis $\bigcup_{m=1}^{\infty} B((x,0,\frac{1}{m}) = B((x,0),1)$. Jos $x_1 = 1$ ja $x_2 = 2$, niin $B((x_1,0),1) \cap B((x_2,0),1) = \varnothing$, joten isompi leikkaus on myös tyhjä:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} B((x,0), \frac{1}{m}) = \varnothing.$$

(d) Tämä leikkaus on myös tyhjä. Olkoon $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tapaus 1: $x > 0$ Olkoon m niin iso, että $\frac{2}{m} < x$. Nyt $d((\frac{1}{m},0),(x,0)) > \frac{1}{m}$. Toisaalta $d((\frac{1}{m},0),(x,0)) \leqslant d((\frac{1}{m},0),(x,y))$ (Pythagoras), joten $d((\frac{1}{m},0),(x,y)) > \frac{1}{m}$. Siis $(x,y) \notin B((\frac{1}{m},0),\frac{1}{m})$. Jos $x \leqslant 0$, niin $d((\frac{1}{m},0),(x,y)) \geqslant d((\frac{1}{m},0),(x,0)) = \frac{1}{m} + |x| \geqslant \frac{1}{m}$, eli jälleen $(x,y) \notin B((\frac{1}{m},0),\frac{1}{m})$.

2. Jos $A \subset B$, osoita, että $d(A) \leqslant d(B)$. Anna esimerkki metrisestä avaruudesta (X,d) ja reaaliluvuista $r_1 < r_2$ ja $a \in X$ siten että $d(B(a,r_1)) = d(B(a,r_2)) < 2r_2$.

Ratkaisu. (a) Määritelmän mukaan $d(B) = \sup\{d(x,y) \mid x,y \in B\}$. Siitä, että supremum on yläraja seuraa, että kaikilla $x,y \in B$ pätee

$$d(x,y) \leqslant d(B).$$

Nyt, koska jokainen x ja y joka on A:ssä on myös B:ssa, niin myös kaikilla $x,y \in A$ pätee

$$d(x,y) \leqslant d(B).$$

Siispä $d(B)$ on joukon $\{d(x,y) \mid x,y \in A\}$ yläraja. Koska supremum on *pienin* yläraja, pätee että

$$\sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} \leqslant d(B),$$

mistä nähdään, että $d(A) \leqslant d(B)$.

(b) Olkoon $X = \mathbb{N}$ luonnollisten lukujen joukko varustettuna tavallisella metriikalla $d(x,y) = |x-y|$. Nyt $B(2,2) = B(2,\frac{3}{2}) = \{1,2,3\}$, eli $d(B(2,2)) = d(B(2,\frac{3}{2})) = 2$.

3. (a) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ aidosti kasvava funktio ja olkoon d jokin metriikka reaaliluvuilla. Olkoon $e\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty kaavalla $e(x,y) = d(f(x), f(y))$ Osoita, että e on metriikka $\mathbb{R}$:ssä.

   (b) Anna esimerkki funktiosta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, niin että e, kuten määritelty edellisessä tehtävässä, ei ole metriikka.

   Ratkaisu. (a) On käytävä läpi ehdot M1, M2 ja M3. Käytettävissä on tiedot että d toteuttaa nämä ehdot sekä funktion f aito kasvu, eli kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$, jos $x < y$, niin $f(x) < f(y)$. Kun käytämme ehtoja M1, M2 ja M3 metriikalle d, käytämme merkintää $M1_d$, $M2_d$ ja $M3_d$. Olkoon $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   M1 $e(x,z) = d(f(x), f(z)) \overset{M1_d}{\leqslant} d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z)) = e(x,y) + e(y,z)$.

   M2 $e(x,y) = d(f(x), f(y)) \overset{M2_d}{=} d(f(y), f(x)) = e(y,x)$.

   M3 Jos $x = y$, niin $f(x) = f(y)$, joten $e(x,y) = d(f(x), f(y)) \overset{M3_d}{=} 0$. Jos toisaalta $x \neq y$, niin joko $x < y$ tai $y < x$, eli aidon kasvun nojalla joko $f(x) < f(y)$ tai $f(y) < f(x)$, mistä seuraa $f(x) \neq f(y)$. Nyt $M3_d$:n nojalla $e(x,y) = d(f(x), f(y)) \neq 0$.

   (b) Olkoon $f(x) = x^2$. Nyt ehto M3 ei toteudu metriikalle e, koska $e(-1,1) = d((-1)^2, 1^2) = d(1,1) = 0$.

   Huomautus: Kohdassa (b) on mahdoton falsifioida kumpikaan ehdoista M1 tai M2, koska niiden todistamisessa kohdassa (a) ei käytetty funktion kasvavuutta. Lisäksi koko tehtävässä kasvavuuden voi korvata oletuksella, että f on injektio.

4. Olkoon X joukko, jonka alkioina ovat kaikki luonnollisten lukujen äärelliset osajoukot ja olkoon $d(x,y) = \#(x \bigtriangleup y)$ edellisten harjoitusten metriikka. Määritä

   (a) $d(\{x \in X \mid \max(x) \leqslant 1000\})$,

   (b) $d(B(\{3\}, 2), B(\{1\}, 2))$,

   (c) $d(B(\{1,2\}, 2), B(\{3,4\}, 2))$.

   Ratkaisu.

   (a) Joukosta $A = \{x \in X \mid \max(x) \leqslant 1000\}$ löytyy alkiot joiden etäisyys toisistaan on 1000: $x = \{0, \dots, 500\}$ ja $y = \{501, \dots, 1000\}$, joille $x \bigtriangleup y = \{1, \dots, 1000\}$. Tästä seuraa, että $d(A) \geqslant 1000$. Toisaalta joukosta ei löydy alkioita, joiden etäisyys olisi suurempi kuin 1000: jos $x, y \in A$, niin $x \bigtriangleup y \subset x \cup y \subset \{1, \dots, 1000\}$, joten $\#(x \bigtriangleup y) \leqslant 1000$. Eli $d(A) = 1000$.

(b) Jos $n \in \mathbb{N}$, niin joukkojen $\{n\}$ ja $\varnothing$ etäisyys on 1, koska $\#(\{n\} \triangle \varnothing) = \#\{n\} = 1$. Siis $\varnothing$ sisältyy alkion $\{n\}$ 2-säteiseen kuulaan riippumatta n:stä, mistä saadaan $\varnothing \in B(\{3\}, 2) \cap B(\{1\}, 2)$. Tästä seuraa, että $\inf\{d(x, y) \mid x \in B(\{3\}, 2), y \in B(\{1\}, 2)\} \leqslant 0$, koska $d(\varnothing, \varnothing) = 0$. Se ei toisaalta voi olla negatiivinen, koska luku $d(x, y)$ on määritelmän nojalla $\geqslant 0$, eli

$$d(B(\{3\}, 2), B(\{1\}, 2)) = 0.$$

Toinen yhteinen alkio näissä kuulissa on joukko $\{1, 3\}$.

(c) Joukossa $A_1 = B(\{1, 2\}, 2)$ on alkiot $\{1\}$, $\{2\}$ ja kaikki pisteet muotoa $\{1, 2, n\}$, missä $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta jos joukko x on kuulassa $B(\{1, 2\}, 2)$, niin $\#(x \triangle \{1, 2\}) \leqslant 1$, toisin sanoin on neljä vaihtoehtoa: $x \triangle \{1, 2\} = \varnothing$, jolloin $x = \{1, 2\}$, $x \triangle \{1, 2\} = \{1\}$, jolloin $x = \{2\}$, $x \triangle \{1, 2\} = \{2\}$, jolloin $x = \{1\}$ ja $x \triangle \{1, 2\} = \{n\}$, $n \notin \{1, 2\}$, jolloin $x = \{1, 2, n\}$. Saatiin siis, että

$$B(\{1, 2\}, 2) = \{\{1, 2, n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{1\}, \{2\}\}.$$

Samalla päättelyllä saadaan, että

$$A_2 = B(\{3, 4\}, 2) = \{\{3, 4, n\} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\{3\}, \{4\}\}.$$

Nähdään, että jokaisen A_2:n alkio sisältää joko 3:n tai 4:n kun taas jokaisen A_1:n alkio sisältää joko 1:n tai 2:n. Tästä seuraa, että $\#(x \triangle y) \geqslant 2$ jokaisella $x \in A_1$ ja $y \in A_2$. Toisaalta $\#(\{2\} \triangle \{3\}) = 2$, eli $d(A_1, A_2) = 2$.

5. Olkoon $X = raj(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ kaikkien rajoitettujen funktioiden $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ joukko. Olkoon $d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{R}^2\}$. Olkoon $g \in X$ funktio, jonka määrittelee kaava $g(x, y) = e^{-|x+y|}$. Kuuluuko g joukkoon

(a) $B(\bar{0}, 1)$,

(b) $\bar{B}(\bar{0}, 1)$,

(c) $B(\bar{1}, 1)$?

Tässä $\bar{0}$ on funktio joka saa arvokseen 0 kaikkialla ja $\bar{1}$ on funktio joka saa arvokseen 1 kaikkialla.

Ratkaisu. Huomataan, että g:n maalijoukko $g[\mathbb{R}^2]$ on $]0, 1]$, sillä funktio saa arvoja mielivaltaisen lähellä nollaa: $g(n, n) = e^{-|2n|} = \frac{1}{e^{2n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$, $g(x, y)$ on aina postiviinen ja koska $-|x + y|$ on negatiivinen, on $e^{-|x+y|} \leqslant 1$ ja pisteessä $x = y = 0$ on $g(0, 0) = 1$.

(a) Äskeisestä seuraa, että $|g(0, 0) - 0| = 1$, eli $\sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} |g(x, y) - 0| \geqslant 1$, joten $g \notin B(0, 1)$, koska sen etäisyys nollasta *ei ole pienempi kuin* 1.

(b) Toisaalta $|g(x,y)-0| = |g(x,y)|$ ei saa ykköstä suurempia arvoja, kuten yllä nähtiin, joten $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |g(x,y)-0| = 1$, eli $g \in \bar{B}(0,1)$, koska kyseessä on suljettu kuula ja g:n etäisyys nollasta *ei ole suurempi kuin* 1.

(c) $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |g(x,y)-1| \geqslant |g(n,n)-1|$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ (supremumin määritelmä). Toisaalta $|g(n,n)-1| \geqslant ||g(n,n)|-1|$ (Analyysi I), ja jälkimmäinen lähestyy lukua 1, kun n kasvaa, joten $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |g(x,y)-1| \geqslant 1$. Toisaalta g:n arvojoukon nähtiin olevan välillä $]0,1]$, joten $|g(x,y)-1| \leqslant 1$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, joten $\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |g(x,y)-1| = 1$. Funktio g ei siis ole kuulassa $B(\bar{1},1)$, koska sen etäisyys vakiofunktiosta $\bar{1}$ *ei ole pienempi kuin* 1.

6. Olkoon $X = \mathbb{R}$ ja d Euklidinen metriikka $d(x,y) = |x-y|$. Päteekö

$$\frac{1}{2} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} B((-1)^m, 1) \ ?$$

Ratkaisu. Parillisilla m, $B((-1)^m,1) = (0,2)$ ja parittomilla $B((-1)^m,1) = (-2,0)$. Tästä seuraa, että $\bigcup_{m=n}^{\infty} B((-1)^m,1) = (-2,0)\cup(0,2)$ kaikilla n. Yhdiste otetaan siis joukoista, jotka ovat keskenään samat ja samat kuin $(-2,0)\cup(0,2)$. Niiden leikkaus on täten $(-2,0)\cup(0,2)$ ja $\frac{1}{2}$ kuuluu siihen.