MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 2
Käytiin läpi pe 16.09.2011

1. (1:5) Todista, että $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ on normi $\mathbb{R}^n$:ssä. Tässä $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ratkaisu. Täytyy tarkistaa ehdot N1, N2 ja N3:

N1: $\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(|x_i| + |y_i|\big) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

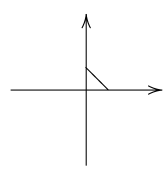
N2: $\|ax\| = \sum_{i=1}^{n} |ax_i| = \sum_{i=1}^{n} |a||x_i| = |a| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |a|\|x\|_1$

N3: kaikki luvut $|x_i|$ ovat itseisarvoina epänegatiivisia, joten niiden summa on positiivinen jos ja vain jos yksikin niistä on positiivinen, eli $\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \iff$ kaikilla i $|x_i| = 0$, jolloin $x = \bar{0}$.

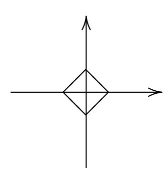
2. Piirrä kuulat $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\}$ ja $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\}$ missä $\|x\|_1$ on kuten edellisessä tehtävässä ja $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Ratkaisu. Merkitään $B_1(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_1 < 1\}$ ja $B_\infty(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\}$. Ehto $\|x\|_1$ tarkoittaa, että $|x_1| + |x_2| < 1$, missä $x = (x_1, x_2)$. Itseisarvon määritelmän nojalla, tämä jakautuu neljään tapaukseen. Tarkastellaan tapausta $x_1, x_2 \geqslant 0$. Tällöin kyseessä on kolmio

$$\{x \mid x_1 + x_2 < 1, x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\} :$$

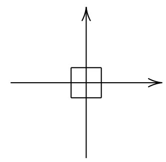


Kaikki muut tapaukset $(x_1 < 0 \wedge x_2 > 0), (x_1 < 0 \wedge x_2 < 0), (x_1 > 0 \wedge x_2 < 0)$ palautuvat itseisarvon ottamisen jälkeen tähän, joten kuulaksi sadaan



Kuvaan on itse asiassa piirretty vain kuulan reuna, joka ei edes ole osa kuulaa, eli neliön sisällä oleva alue on kysytty kuula. Merkki $\wedge$ luetaan "ja".

$B_\infty(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty < 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x_1|, |x_2|\} < 1\}$. Kyseessä siis kaikki pisteet, joiden kumpikin koordinaatti on pienempi kuin 1, sillä ehto on ekvivalentti sen kanssa, että $(|x_1| < 1) \wedge (|x_2| < 1)$, eli kuulaksi saadaan



3. Olkoon X jokin kokoelma äärellisiä joukkoja. Kun $x, y \in X$, määritellään $d(x,y) = \#(x \triangle y)$, missä $x \triangle y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ on joukkojen symmetrinen erotus. Osoita, että d on metriikka X:ssä.

   Ratkaisu. On selvää, että symmetrisyysehto M2 toteutuu. Jos $d(x,y) = 0$, niin $\#((x \setminus y) \cup (y \setminus x)) = 0$, eli joukot $x \setminus y$ ja $y \setminus x$ ovat tyhjiä. Ensimmäisestä seuraa, että $x \subset y$ ja toisesta seuraa, että $y \subset x$, eli $x = y$. Tämä todistaa ehdon M3.

   Seuraavaksi todistetaan, että ehto M1 pätee. Todistetaan ensin pari aputulosta: (1) Kaikilla $x, y, z \in X$ pätee

   $$x \triangle z \subset (x \triangle y) \cup (y \triangle z).$$

   Todistus. Huomataan, että

   $$(x \setminus y \cup y \setminus x) \cup (y \setminus z \cup z \setminus y),$$

   eli joukko $(x \triangle y) \cup (y \triangle z)$ on neljän joukon yhdiste:

   $$(x \setminus y) \cup (y \setminus x) \cup (y \setminus z) \cup (z \setminus y).$$

   Oletetaan $a \in x \triangle z$. On osoitettava, että a kuuluu joukkoon $(x \triangle y) \cup (y \triangle z)$. Sitä varten riittää osoittaa, että se kuuluu yhteen joukoista $(x \setminus y)$, $y \setminus x$, $y \setminus z$, $z \setminus y$.

   Koska $a \in x \setminus z \cup z \setminus x$, meillä on kaksi vaihtoehtoa: joko (1) $a \in x \setminus z$ tai (2) $a \in z \setminus x$. Tapaus (1) jakautuu kahteen tapaukseen (1.1) $a \in y$, jolloin $a \in y \setminus z$ ja tapaukseen (1.2) $a \notin y$, jolloin $a \in x \setminus y$. Tapaus (2) jakautuu kahteen tapaukseen (2.1) $a \in y$, jolloin $a \in y \setminus x$ ja tapaukseen (2.2) $a \notin y$, jolloin $a \in z \setminus y$.

   Tämä todistaa, että $x \triangle z \subset (x \triangle y) \cup (y \triangle z)$. On helppo nähdä, että

   $$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B),$$

   tämä johtuu siitä, että yhteenlaskussa $\#A + \#B$, A:n ja B:n yhteiset alkiot tulevat laskettua kahteen kertaan. Siispä $\#(A \cup B) \leqslant \#A + \#B$. Sijoittamalla A:n paikalle $x \triangle y$ ja B:n paikalle $y \triangle z$, saadaan, että

   $$\#((x \triangle y) \cup (y \triangle z)) \leqslant \#(x \triangle y) + \#(y \triangle z).$$

   Yhdistämällä tämä siihen, että jos $A \cup B$, niin $\#A \leqslant \#B$, sekä edelliseen havaintoon, saadaan, että

   $$d(x,z) = \#(x \triangle z) \leqslant \#((x \triangle y) \cup (y \triangle z)) \leqslant \#(x \triangle y) + \#(y \triangle z)) = d(x,y) + d(y,z).$$

4. Anna esimerkki funktiosta $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ joka ei ole metriikka, mutta joka toteuttaa metriikan ehdot M2 ja M3.

Ratkaisu. Esimerkiksi $d(x,y) = (x-y)^2$. Ehto M2: $(x-y)^2 = ((-1)(y-x))^2 = (-1)^2(y-x)^2 = (y-x)^2$. Ehto M3: $(x-y)^2 = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$. Toisaalta ehto M1 ei päde, sillä

$$d(2,5) = 9 > 5 = 1 + 4 = d(2,3) + d(3,5).$$

5. Pidetään tunnettuna, että kaava $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$ määrittelee metriikan jatkuvien funktioiden avaruudessa $C[0,1]$. Päteekö tässä avaruudessa $(C[0,1], d)$ että $f \in B(\bar{0}, 1)$, kun $\bar{0}$ on funktio joka on identtisesti nolla ja
   (a) $f(x) = x^2$,
   (b) $f(x) = 1$?

Ratkaisu. f on kuulassa $B(\bar{0}, 1)$, jos $d(f, \bar{0}) < 1$. (a) Merkitään $g = \bar{0}$ ja $f(x) = x^2$ ja lasketaan

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 |x^2 - 0|dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} < 1,$$

siis $f \in B(\bar{0}, 1)$. (b) Sitten lasketaan sama kun $f(x) = 1$:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx = \int_0^1 |1 - 0|dx = \int_0^1 1dx = 1 \not< 1,$$

eli $f \notin B(\bar{0}, 1)$.

6. Olkoon (X, d) metrinen avaruus, $x \in X$ ja $r_1 < r_2$ positiivisia reaalilukuja. Osoita, että $B(x, r_1) \subset B(x, r_2)$ ja anna esimerkki tilanteista, joissa (a) $B(x, r_1) = B(x, r_2)$, (b) $B(x, r_1) \neq B(x, r_2)$.

Ratkaisu. Oletetaan, että $a \in B(x, r_1)$. Silloin kuulan määritelmän mukaan $d(x, a) < r_1$. Koska $r_2 > r_1$, tästä seuraa, että $d(x, a) < r_2$, mikä taas määritelmän mukaan tarkoittaa sitä, että $a \in B(x, r_2)$. Esimerkiksi jos X on kokonaislukuje joukko $X = \mathbb{Z}$ varustettuna tavallisella (Euklidisella) metriikalla $d(n,m) = |n - m|$. Nyt $B(0, \frac{1}{2}) = B(0, 1) = \{0\}$ ja toisaalta $B(0, 4) \neq B(0, 6)$, koska $5 \in B(0, 6)$, mutta $5 \notin B(0, 4)$.