MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 12
Käytiin läpi pe 09.12.2011

1. Olkoon $a, b \in S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $a \neq b$. Osoita, että $S^1 \setminus \{a\}$ on yhtenäinen ja $S^1 \setminus \{a, b\}$ on epäyhtenäinen.

   Ratkaisu. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to S^1$ määritelty seuraavasti: $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Tiedetään, että sini- ja kosinifunktiot ovat jatkuvia, joten f on jatkuva (Lause 5.9). Olkoon $a \in S^1$. Nyt on olemassa reaaliluku t_0 siten että $f(t_0 + 2\pi n) = a$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$ ja kaikilla muilla reaaliluvuilla t, $f(t) \neq a$. Rajoittamalla funktio f välille $]t_0, t_0 + 2\pi[$ saadaan funktio g, jonka lähtöjoukko on avoin väli $]t_0, t_0 + 2\pi[$ ja jonka kuva on $S^1 \setminus \{a\}$. g on siis surjektio avoimelta väliltä joukolle $S^1 \setminus \{a\}$, jonka yhtenäisyys piti todistaa. Lauseesta 14.15 tiedetään, että avoin väli on yhtenäinen. Nyt lauseesta 14.16 seuraa, että myös $S^1 \setminus \{a\}$ on yhtenäinen (jos se ei olisi, olisi olemassa separaatio $A|B$, jonka avulla saataisiin separaatio $g^{-1}A|g^{-}B$ avoimelle välille).

   Olkoo $a, b \in S^1$, $a \neq b$. Olkoon L suora, joka kulkee pisteiden a ja b kautta. Tapaus 1. Suora ei ole y-akselin suuntainen. Silloin suora on yhtälön $y = vx + u$ ratkaisujoukko joillain v ja u. Nyt joukot

   $$A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < vx + u\} \text{ ja } B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > vx + u\}$$

   ovat avoimia $\mathbb{R}^2$:ssa, joten joukot $A = A' \cap S^1$ ja $B = B' \cap S^1$ ovat avoimia S^1:ssä (Lause 7.2). Ne ovat selvästi erilliset ja niiden yhdiste sisältää kaikki S^1:n pisteet paitsi a:n ja b:n (koska ne ovat ainoat ympyrän pisteet, jotka ovat suoralla L). Siis $A \cup B = S^1 \setminus \{a, b\}$. Lisäksi A ja B ovat epätyhjiä. Tämä seuraa siitä, että piste, joka on a:n ja b:n välissä, $c = (a + b)/2$, on suoralla L sijaitsee ympyrän sisällä. Näin ympyrällä on varmasti sekä pisteitä jotka toteuttavat epäyhtälön $y < vx + u$ että $y > vx + u$.

   Näin saatiin tarkistettua kaikki yhtenäisyyden määritelmässä esiintyneet vaatimukset.

2. Olkoon $a \in S^1$. Osoita, että S^1 ja $S^1 \setminus \{a\}$ eivät ole homeomorfisia keskenään.

   Ratkaisu. Tapa 1: Edellä määritelty kuvaus g on itse asiassa homeomorfismi avoimelta väliltä avaruudelle $S^1 \setminus \{a\}$. Miksi: se on jatkuva, se nähtiin ja lisäksi se on surjektio. Koska väli oli valittu 2π:n mittaiseksi, kuvaus $(\cos t, \sin t)$ on siinä myös injektio. Nyt riittää näyttää, että käänteiskuvaus on jatkuva. Mutta se on ekvivalenttia sen kanssa, että suljetun joukon alkukuva on suljettu. Merkitään avointa väliä, joka on g:n lähtöjoukko kirjaimella I (niin kuin *interval*). Olkoon $C \subset I$ suljettu. Nyt se on rajoitettu ja suljettu $\mathbb{R}$:n osajoukko, joten se on kompakti. Nyt sen alkukuva käänteiskuvauksessa $(f^{-1})^{-1}(C)$ on sama kuin sen kuva fC. Mutta f on jatkuva ja kompaktin joukon kuva on kompakti (Lause 13.18), joten fC on kompakti, eli suljettu. Tässä käytettiin Heine-Borelin lausetta (13.14) kaksi kertaa.

Avaruus $S^1 \setminus \{a\}$ on siis homeomorfinen avoimen välin kanssa, eli se ei voi olla kompakti (Lause 13.19). Toisaalta S^1 on kompakti, koska se on suljettu ja rajoitettu $\mathbb{R}^2$:n osajoukko.

3. Osoita, että $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfisia keskenään.

Ratkaisu. Oletetaan vastoin, että $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ on homeomorfismi. Määritellään funktio $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ yhtälöllä $g(x) = f(x)$ kaikilla $x \neq 0$. Nyt g on homeomorfismi avaruudesta $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avaruuteen $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$. Toisaalta $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ei ole yhtenäinen, mutta $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ on, joten Lauseen 14.17 nojalla saadaan ristiriita. Tehtävästä sai täydet pisteet vaikka ei todistanu, että $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ on yhtenäinen. Käydään kuitenkin läpi eräs todistus sille.

Miksi $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ on yhtenäinen? Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ ja olkoon $Y(x_0, r)$ ympyrä, jonka säde on r ja joka menee pisteen x_0 kautta. Eli sen keskipiste on esimerkiksi pisteessä $x_0 + (r, 0)$ tai pisteessä $x_0 - (r, 0)$. Nyt tämä $Y(x_0, r)$ joko sisältyy joukkoon $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ tai se sisältää pisteen $f(0)$. Molemmissa tapauksissa avaruus $Y(x_0, r) \setminus \{f(0)\}$ on yhtenäinen (jos $f(0) \notin Y(x_0, r)$, niin sen takia, että $Y(x_0, r) \approx S^1$ ja jos $f(0) \in Y(x_0, r)$, niin sen takia, että $Y(x_0, r) \setminus \{f(0)\} \approx S^1 \setminus \{a\}$, joka todistettiin yhtenäiseksi.). Nyt $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ on yhdiste kaikista tällaisista ympyröistä, joista on tarvittaessa poistettu piste $f(0)$ (mikäli se on mahdollista poistaa). Nämä ovat kaikki yhtenäisiä ja ne kaikki sisältävät pisteen x_0. Lauseen 14.12 nojalla saadaan, että $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$ on yhtenäinen.

4. (14:10) Olkoon $n \geqslant 1$ ja $f\colon S^n \to \mathbb{R}$ jatkuva, missä $S^n = \partial B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d(\bar{0}, x) = 1\}$. Osoita, että on olemassa pallon S^n vastakkaiset pisteet, joissa f saa saman arvon. Asettamalla $n = 2$ ja ajattelemalla palloa S^2 mallina maapallon pinnalle, saadaan, että maapalolla on joka hetki kaksi vastakkaista pistettä, joissa on sama lämpötila.

Ratkaisu. Olkoon $h\colon [0, \pi] \to S^n$ funktio joka on määritelty näin:

$$h(t) = (\cos t, \sin t, 0, \ldots, 0).$$

Nyt $h(0) = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ on pohjoisnapa ja $h(\pi) = (-1, 0, 0 \ldots, 0) = -h(0)$ on siitä vastakkainen piste, eli voimme kutsua sitä etelänavaksi. Merkitään pohjoisnapaa P ja etelänapaa E. Olkoon $g(x) = f(x) - f(-x)$. Jos $g(P) = 0$, niin $f(P) - f(-P) = 0$, eli $f(P) = f(-P) = f(E)$, eli silloin pohjoisnapa on kysytty piste. Jos $g(P) < 0$, niin $f(P) - f(-P) < 0$. Tästä seuraa, että $f(-E) - f(E) < 0$, eli itse asiassa $f(E) - f(-E) = g(E) > 0$. Tarkatsellaan funktiota $g \circ h\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Tämä on kahden jatkuvan funktion yhdisteenä jatkuva ja lähtöjoukko on suljettu väli. Lisäksi $(g \circ h)(0) = g(h(0)) = g(P) < 0$ ja $(g \circ h)(\pi) = g(E) > 0$. Bolzanon lauseen nojalla löytyy piste $x \in [0, \pi]$ siten että $(g \circ h)(x) = 0$, eli $g(h(x)) = 0$, eli $f(h(x)) - f(-h(x)) = 0$, eli $f(h(x)) = f(-h(x))$. Tämä $h(x)$ on siis haluttu piste. Jos taas $g(P) > 0$, niin tämä menee symmetrisesti.