MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 11
Käytiin läpi pe 02.12.2011

Kaikissa tehtävissä $X = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}$ varustettuna metriikalla $\delta(A_0, A_1) = \min\{r \mid A_0 \subset \bar{B}(A_1, r) \wedge A_1 \subset \bar{B}(A_0, r)\}$, missä $\bar{B}(A_0, r) = \{x \mid d(x, A_0) \leqslant r\}$.

1. Osoita, että jos $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ovat kompakteja kaikilla $i \in I$, niin $\bigcap_{i\in I} A_i$ on kompakti.

   Ratkaisu. Heine-Borelin lauseen nojalla jokainen A_i on suljettu ja rajoitettu. Suljettujen joukkojen leikkaus on suljettu, joten $\bigcap_{i\in I} A_i$ on suljettu. Olkoon $i_0 \in I$ mielivaltainen alkio. Leikkauksen määritelmästä seuraa $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A_{i_0}$. Koska A_{i_0} on rajoitettu, on $\bigcap_{i\in I} A_i$ sen osajoukkona myös rajoitettu. Näin ollen sen sekä rajoitettu että suljettu, eli Heine-Borelin lauseen nojalla kompakti.

2. Olkoon $Z \subset X$ rajoitettu. Osoita, että on olemassa sellainen r, että kaikilla $A \in Z$ pätee $A \subset B(\bar{0}, r)$.

   Ratkaisu. Jos Z on tyhjä, niin väite on triviaali. Oletetaan, että se ei ole tyhjä ja että $A_0 \in Z$. Koska Z on rajoitettu, on olemassa q siten että kaikilla $A_1, A_2 \in Z$ pätee $\delta(A_1, A_2) < q$. Funktio $x \mapsto d(\bar{0}, x)$ on jatkuva ja koska A_0 on kompakti, niin tämä funktio saa joukossa A_0 suurimman arvonsa jossakin pisteessä $x_0 \in A_0$ (ks. 4.6 ja Lause 13.21). Olkoon $p = d(\bar{0}, x_0)$ tämä suurin arvo. Olkoon $r = p + q + 1$. Tavoitteena on todistaa, että kaikilla $A \in Z$ pätee $A \subset B(\bar{0}, r)$. Olkoon $A \in Z$ mielivaltainen ja olkoon $x \in A$. Koska $A_0 \subset \bar{B}(A, q)$, niin löytyy $y \in A_0$ s.e. $d(y, x) \leqslant q$ Toisaalta $d(0, y) \leqslant d(0, x_0) = p$, koska viimeinen maksimoi etäisyyden, joten kolmioepäyhtälöstä saadaan

   $$d(\bar{0}, x) \leqslant d(\bar{0}, y) + d(y, x) \leqslant p + q < p + q + 1 = r,$$

   eli $x \in B(\bar{0}, r)$. Näin saimme todistettua, että $A \subset B(\bar{0}, r)$ niin kuin pitikin.

3. Osoita, että jos $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ on jono X:n alkioita (eli kompakteja ja epätyjiä $\mathbb{R}^n$:n osajoukkoja) joille pätee $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, niin $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ on epätyhjä.

   Ratkaisu. Koska jokainen A_i on epätyhjä, voidaan valita jono $x_i \in A_i$. Koska joukot A_i ovat sisäkkäisiä, tästä seuraa $x_i \in A_1$ kaikilla i ja koska A_1 on kompakti, niin jonolla on suppeneva osajono $x_{i_k} \xrightarrow{k\to\infty} a$ ja $a \in A_1$. Osoitetaan, että $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Jonon $(x_{i_k})_{k=n}^{\infty}$ jokainen jäsen sisältyy kokonaan joukkoon A_n. Koska A_n on kompakti, se on suljettu, joten Lauseesta 11.6 seuraa, että $a \in A_n$. Tällä tavalla saadaan, että a on jokaisessa joukossa A_n, eli $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, m mikä oli todistettavana.

4. Olkoot $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ ja A kuten edellisessä tehtävässä ja $C \in X$. Oletetaan, että jollain $\varepsilon > 0$ pätee $\delta(C, A_i) \leqslant \varepsilon$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Osoita, että $\delta(C, A) \leqslant \varepsilon$.

Ratkaisu. Koska $A_i \subset \bar{B}(C,\varepsilon)$ ja $A \subset A_i$, seuraa tästä että $A \subset \bar{B}(C,\varepsilon)$ (1).

Olkoon $c \in C$ mielivaltainen. Koska $\delta(C, A_i) \leqslant \varepsilon$ jokaisella i, niin löytyy $y_i \in A_i$ jolle pätee $d(c, y_i) \leqslant \varepsilon$. Näistä muodostuu jono (y_i), jolla on A_1:n kompaktiuden nojalla suppeneva osajono (y_{i_k}). Kuten edellisen tehtävän ratkaisussa, tämä jono suppenee kohti pistettä $a \in A$. Koska $z \mapsto d(c,z)$ on jatkuva ja $y_{i_k} \to a$, niin $d(c, y_{i_k}) \to d(c,a)$. Koska $d(c, y_{i_k}) \leqslant \varepsilon$, niin on raja-arvonkin $d(c,a)$ oltava $\leqslant \varepsilon$ (ks. myös tehtävä 7 alla). Näin mielivaltaiselle pisteelle $c \in C$ löydettiin pisten $a \in A$, jolle $d(c,a) \leqslant \varepsilon$. Tästä seuraa (esim. edellisten laskareiden tehtävän 5 nojalla), että $C \subset \bar{B}(A,\varepsilon)$ (2).

Kohdista (1) ja (2) seuraa, että $\delta(C,A) \leqslant \varepsilon$.

5. Oletetaan, että $Z \subset X$ on rajoitettu. Osoita, että joukko $\overline{\bigcup Z} = \overline{\bigcup_{A \in Z} A}$ on kompakti.

Ratkaisu. Tehtävän 2 nojalla on olemassa r siten että jokainen $A \in Z$ sisältyy kuulaan $B(0,r)$. Silloin $\bigcup Z$ sisältyy myös tähän samaan kuulaan, eli $\bigcup Z$ on rajoitettu ja sisältyy itse asiassa suljettuun kuulaan $\bar{B}(\bar{0}, r)$. Lauseen 6.8(3) nojalla myös joukon $\bigcup Z$ sulkeuma sisältyy tähän joukkoon (intuitio: sulkeuma on pienin suljettu joukko, joka sisältää $\bigcup Z$:n, eli sisältyy jokaiseen muuhun suljettuun joukkoon, joka sisältää sen). Joukko $\overline{\bigcup Z}$ on siis suljettu ja rajoitettu, ja koska se on $\mathbb{R}^n$:n osajoukko, se on kompakti Heine-Borelin lauseen nojalla.

6. Oletetaan, että $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono avaruudessa (X, δ). Osoita, että tällöin joukko
$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$$
on kompakti ja epätyhjä, eli $A \in X$.

Ratkaisu. Edellisen harjoituksen tehtävän 1 nojalla $Z_k = \{A_i \mid i \in \mathbb{N}, i > k\}$ on rajoitettu jokaisella k. Joten edellisen tehtävän 5 nojalla $\overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i} = \overline{\bigcup Z_k}$ on kompakti. Olkoon $B_k = \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$. Koska yllä olevan nojalla jokainen B_k on kompakti, niin tehtävän 1 nojalla $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{i=k}^{\infty} A_i}$ on kompakti. Toisaalta $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$, koska yhdiste otetaan aina vain pienemmän indeksijoukon yli, eli tehtävän 3 nojalla se on epätyhjä.

7. Oletetaan, että Y on metrinen avaruus, (y_n) suppeneva jono Y:ssä ja $x \in Y$. Oletetaan lisäksi, että $y_n \to y$ ja $d(x, y_n) < r$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että $d(x,y) \leqslant r$.

Ratkaisu. **Tapa 1:** Oletuksen nojalla $d(x, y_n) \leqslant r$ ja jokaisella ε löytyy n, jolla $d(x, y_n) < \varepsilon$. Nyt kolmioepäyhtälöstä tälle n pätee $d(x,y) \leqslant d(x,y_n) + d(y_n, y) < r + \varepsilon$. Saadaan siis jokaisella $\varepsilon > 0$, että $d(x,y) \leqslant r + \varepsilon$. Tästä seuraa, että $d(x,y) = r$.

Tapa 2: (Tehtävän 4 ratkaisun loppu yllä).

8. Osoita, että tehtävän 6 joukko A on jonon $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ raja-arvo. Päättele tästä, että (X, δ) on täydellinen metrinen avaruus.

Ratkaisu. Tehtävän 6 nojalla A on avaruudessa X. Seuraavassa todistetaan, että A on jonon raja-arvo.

Jos $\varepsilon > 0$, niin on olemassa n s.e. kaikilla $i, j > n$ pätee $\delta(A_i, A_j) \leqslant \varepsilon$. Kiinnitetään $i > n$. Jokaisella $j > n$ siis pätee $A_j \subset \bar{B}(A_i, \varepsilon)$, mistä seuraa $\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j \subset \bar{B}(A_i, \varepsilon)$ kaikilla $m > n$ ja edelleen, koska $\bar{B}(A_i, \varepsilon)$ on suljettu, niin $\overline{\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j} \subset \bar{B}(A_i, \varepsilon)$. Toisaalta jos $j > m > n$, niin $A_i \subset \bar{B}(A_j, \varepsilon) \subset \bar{B}(\overline{\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j}, \varepsilon)$, eli itse asiassa $\delta(A_i, \overline{\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j}) \leqslant \varepsilon$ kaikilla $m > n$. Nyt tehtävästä 4 seuraa, että $\delta(A_i, \bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{j=m}^{\infty} A_j}) = \delta(A_i, A) \leqslant \varepsilon$. Koska $i > n$ oli mielivaltainen, pätee tämä kaikille $i > n$.