MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 10
Käytiin läpi pe 25.11.2011

1. (12:2) Osoita, että Cauchyn jono on aina rajoitettu, eli $d(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}) < \infty$ kun (x_n) on Cauchyn jono.

   Ratkaisu. Jono jaetaan kahteen osaan: loppuosaan, joka on rajoitettu, koska jono on Cauchy ja alkuosaan, joka on rajoitettu, koska se on äärellinen. Sen jälkeen määritellään lopullinen säde r niin että myös alkuosan ja loppuosan alkioiden väliset etäisyydet ovat rajoitettuja.

   Täytyy siis osoittaa, että on olemassa r siten että jokaisella n, m pätee $d(x_n, x_m) < r$. Olkoon $\varepsilon = 1$. Koska jono on Cauchy, on olemassa sellainen n_0, että kaikilla $n, m > n_0$ pätee $d(x_m, x_n) < 1$. Olkoon $p = \max\{d(x_k, x_h) \mid k, h \leqslant n_0\}$. Koska n_0:aa pienempiä lukuja on äärellisen monta, on r äärellinen. Olkoon $r = p + 1$. Väitetään, että kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$ pätee $d(x_n, x_m) < r$. Jos n ja m ovat molemmat suurempia kuin n_0, niin $d(x_n, x_m) < 1 \leqslant r$. Jos ne ovat molemmat pienempiä tai yhtäsuuria kuin n_0, niin yllä olevan mukaan $d(x_n, x_m) \leqslant p < r$. Jos taas $n \leqslant n_0$ ja $m > n_0$, niin

   $$d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, x_m) \leqslant p + 1 = r.$$

   Eli kaikissa tapauksissa saatiin haluttu tulos.

2. (12:3) Todista että metrisen avaruuden täydellinen osajoukko on suljettu.

   Ratkaisu. Idea on käyttää lausetta 11.6, että jos joukon sulkeumassa on piste, niin joukosta löytyy Cauchy jono, joka suppenee tätä pistettä kohti.

   Olkoon $A \subset X$ täydellinen. Olkoon $x \in \bar{A}$. Täytyy osoittaa, että $x \in A$. Lauseen 11.6 nojalla on olemassa jono (x_n) jonka kaikki jäsenet ovat A:ssa ja jonka raja-arvo on a. Koska tämä jono suppenee, se on Cauchy Lauseen 12:3 nojalla. Koska A on täydellinen, sen jokainen Cauchy jono suppenee (A:ssa!), eli jonolla (x_n) on raja-arvo $b \in A$. Mutta koska a on myös jonon (x_n) raja-arvo, on oltava $a = b$ ja siis $a \in A$ mikä oli todistettavana.

3. Osoita, että jos $x \in H(A_0, A_1)$ ja $y > x$, niin $y \in H(A_0, A_1)$.

Ratkaisu. Tehtävässä on käytetty seuraavat määritelmät: $X = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ on kompakti ja epätyhjä}\}$ ja jokaisilla $A_0, A_1 \in X$ määriteltiin reaalilukujen joukko

$$H(A_0, A_1) = \{r \mid A_1 \subset \bar{B}(A_0, r) \ \&\ A_0 \subset \bar{B}(A_1, r)\}.$$

Eli jos r on tarpeeksi iso, että joukot A_0 ja A_1 kuuluvat toistensa r-pullistumiin, niin $r \in H(A_0, A_1)$. On ilmiselvää, että jos lukua kasvattaa, niin se säilyttää tämän ominaisuuden. Vähän tarkemmin:

Selvästi nähdään, että jos $y > x$, niin

$$\bar{B}(A_0, x) \subset \bar{B}(A_0, y) \tag{1}$$

ja

$$\bar{B}(A_1, x) \subset \bar{B}(A_1, y). \tag{2}$$

Jos $x \in H(A_0, A_1)$, niin $A_0 \subset \bar{B}(A_1, x)$ ja $A_1 \subset \bar{B}(A_0, x)$. Nyt jos $y > x$, niin (1):stä ja (2):sta seuraa tietenkin, että $A_0 \subset \bar{B}(A_1, y)$ ja $A_1 \subset \bar{B}(A_0, y)$, eli y toteuttaa joukkoon $H(A_0, A_1)$ kuulumisen ehdon.

4. Osoita, että $H(A_0, A_1)$ on suljettu, eli on olemassa $\min H(A_0, A_1)$.

Ratkaisu. Idea on käyttää kompaktisuutta, erityisesti sitä, että funktioilla on suurimmat ja pienimmät arvot.

Olkoon $f\colon A_0 \to \mathbb{R}$ funktio $f(x) = d(x, A_1)$ joka mittaa x:n etäisyyttä joukosta A_1 ja $g\colon A_1 \to \mathbb{R}$ funktio $g(x) = d(x, A_0)$, joka mittaa x:n etäisyyttä joukosta A_0. Koska f ja g ovat jatkuvia ja niiden lähtöjoukot kompakteja, niin Lauseen 13.21 nojalla niillä on suurimmat arvot. Olkoon M_0 funktion f ja M_1 funktion g suurin arvo ja olkoon $x_0 \in A_0$ piste, josse $f(x_0) = M_0$ ja x_1 piste jossa $g(x_1) = M_1$.

Olkoon $r = \max\{M_0, M_1\}$. Väite: $H(A_0, A_1) = [r, \infty[$. Oletetaan, että $x \in H(A_0, A_1)$. Se meinaa sitä, että $A_0 \subset \bar{B}(A_1, x)$, eli jokaisella $a \in A_0$ pätee $d(a, A_1) \leqslant x$ ja muun muassa $M_0 = d(x_0, A_1) \leqslant x$. Koska M_0 on funktion $d(x, A_1)$ maksimi, seuraa tästä, että $M_1 \leqslant x$. Samalla tavalla saadaan $M_0 \leqslant x$, eli $r \leqslant x$, eli $x \in [r, \infty[$. Toisaalta, oletetaan $x \in [r, \infty[$. Jos $a \in A_0$, niin $d(a, A_1) \leqslant M_0$, koska M_0 on tämän funktion suurin arvo, eli $d(a, A_1) \leqslant r \leqslant x$, eli $a \in \bar{B}(A_1, x)$. Saimme siis että $A_0 \subset \bar{B}(A_1, x)$. Samalla tavalla saadaan, että $A_1 \subset \bar{B}(A_0, x)$, eli $x \in H(A_0, A_1)$. Tämä todistaa väitteen ja $r = \min H(A_0, A_1)$.

5. Jokaisilla $A_0, A_1 \in X$ määritellään $\delta(A_0, A_1) = \min H(A_0, A_1)$. Osoita, että $\delta(A_0, A_1) \leqslant r$ jos ja vain jos jokaisella $a_0 \in A_0$ löytyy sellainen $a_1 \in A_1$, että $d(a_0, a_1) \leqslant r$ ja jokaisella $a_1 \in A_1$ löytyy sellainen $a_0 \in A_0$, että $d(a_0, a_1) \leqslant r$.

Ratkaisu. Oletetaan, että $\delta(A_0, A_1) \leqslant r$, eli $r \in H(A_0, A_1)$. Oletetaan sitten, että $a_0 \in A_0$. Oletuksesta tiedetään, että $A_0 \subset \bar{B}(A_1, r)$, eli $a_0 \in \bar{B}(A_1, r)$, joka puolestaan tarkoittaa sitä että $d(a_0, A_1) \leqslant r$. Nyt Lauseen 13.22 nojalla (oletuksenamme on koko ajan, että A_0 ja A_1 ovat kompakteja) löytyy $a_1 \in A_1$ jolle $d(a_0, a_1) = d(a_0, A_1) \leqslant r$. Samoin jokaiselle $a_1 \in A_1$ löydetään $a_0 \in A_0$ siten että $d(a_0, a_1) \leqslant r$.

Oletetaan kääntäen, että jokaisella $a_0 \in A_0$ löytyy $a_1 \in A_1$ siten että $d(a_0, a_1) \leqslant r$ ja jokaisella $a_1 \in A_1$ löytyy $a_0 \in A_0$ siten että $d(a_1, a_0) \leqslant r$. Täytyy osoittaa, että $A_0 \subset \bar{B}(A_1, r)$ ja $A_1 \subset \bar{B}(A_0, r)$. Olkoon tätä varten $a_0 \in A_0$. Oletuksen mukaan löytyy $a_1 \in A_1$, jolle $d(a_0, a_1) \leqslant r$. Mutta $d(a_0, A_1) = \inf\{d(a_0, x) \mid x \in A_1\} \leqslant d(a_0, a_1) \leqslant r$, mistä seuraa suoraan pullistuman määritelmän nojalla, että $a_0 \in \bar{B}(A_1, r)$. Koska a_0 oli valittu mielivaltaisesti, niin $A_0 \subset \bar{B}(A_1, r)$. Samoin saadaan toinen puoli, eli $\delta(A_0, A_1) \leqslant r$.

6. Osoita, että δ on metriikka X:ssä.

Ratkaisu. M1. Olkoon A_0, A_1, A_2 kompakteja ja epätyhjiä. Merkitään $\delta(A_0, A_1) = r_1$, $\delta(A_1, A_2) = r_2$. Olkoon $a_0 \in A_0$. Nyt on edellisen tehtävän nojalla olemassa $a_1 \in A_1$ siten että $d(a_0, a_1) \leqslant r_1$. Edelleen, löytyy $a_2 \in A_2$ siten että $d(a_1, a_2) \leqslant r_2$. Nyt kolmioepäyhtälön nojalla $d(a_0, a_2) \leqslant d(a_0, a_1) + d(a_1, a_2) \leqslant r_1 + r_2$.

Löysimme siis mielivaltaiselle $a_0 \in A_0$ sellaisen $a_2 \in A_2$, että $d(a_0, a_2) \leqslant r_1 + r_2$. Samalla tavalla, lähtemällä A_2:sta voimme mielivaltaiselle $a_2 \in A_2$ löytää sellaisen $a_0 \in A_0$, että $d(a_2, a_0) \leqslant r_1 + r_2$. Nyt edellisen tehtävän nojalla tästä seuraa, että $\delta(A_0, A_2) \leqslant r_1 + r_2$. Sijoittamalla r_1:n ja r_2:n paikalle sen miten ne olivat määriteltyjä saadaan $\delta(A_0, A_2) \leqslant \delta(A_0, A_1) + \delta(A_1, A_2)$.

M2: Triviaali.

M3: Palautamme mieleen, että $\bar{B}(A, 0) = \{x \mid d(x, A) = 0\} = \bar{A}$ (harjoituksen 7 tehtävä 2). Siis jos A on suljettu, niin $\bar{B}(A, 0) = A$. Jos A on kompakti, niin se on suljettu (13.6). Meidän joukot A_0 ja A_1 ovat kompakteja, siispä $\bar{B}(A_i, 0) = A_i$, $i \in \{1, 2\}$. Jos $A_0 = A_1$, niin selvästi $A_0 \subset A_1 = \bar{B}(A_1, 0)$ ja $A_1 \subset A_0 = \bar{B}(A_0, 0)$, eli $\delta(A_0, A_1) = 0$. Toisaalta jos $\delta(A_0, A_1) = 0$, niin $A_0 \subset \bar{B}(A_1, 0) = A_1$ ja $A_1 \subset \bar{B}(A_0, 0) = A_0$, eli sekä $A_0 \subset A_1$ että $A_1 \subset A_0$.