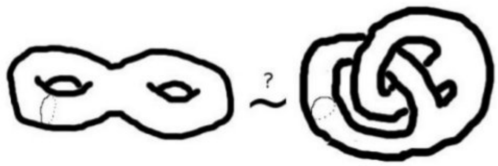
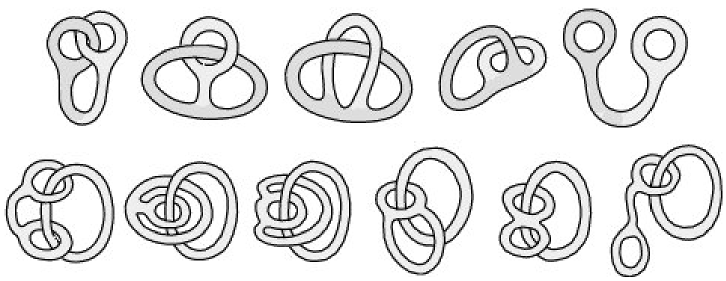
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Topologia I (opettajalinjan työpaja)
Ratkaisuehdotukset harjoitukseen 1
Käytiin läpi pe 09.09.2011

1. Onko pretzel-pinta mahdollista muokata jatkuvalla muunnoksella linkittyneeksi pretzel-pinnaksi?



Ratkaisu. Alla ratkaisu myös toiseen tehtävään, jota ei ollut kurssilla.



2. Todista de Morganin lait: olkoon X joukko ja $A_j \subset X$ kaikilla $j \in J$, missä J on jokin indeksijoukko. Tällöin

$$X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j = \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j) \text{ ja } X \setminus \bigcap_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus A_j)$$

Ratkaisu. Jos $x \in X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j$, niin $x \in X$ ja $x \notin \bigcup_{j \in J} A_j$. Jälkimmäinen tarkoittaa sitä että x ei kuuluu joukkoon A_j millään $j \in J$. Täten jokaisella $j \in J$ pätee että $x \in X \setminus A_j$, eli x kuuluu jokaiseen joukkoon $X \setminus A_j$, eli myös niiden leikkaukseen $\bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j)$.

Toisaalta kaikki nämä implikaatiot pätevät toiseenkin suuntaan: jos x kuuluu leikkaukseen $\bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j)$, niin $x \in X$ ja jokaisella $j \in J$ pätee $x \notin A_j$. Siispä $x \notin \bigcup_{j \in J} A_j$, eli $x \in X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j$.

Saman voi esittää ekvivalenssien ketjuna:

$$
\begin{aligned}
& x \in X \setminus \bigcup_{j \in J} A_j \\
\iff \quad & x \in X \ \& \ x \notin \bigcup_{j \in J} A_j \\
\iff \quad & x \in X \ \& \ \forall j \in J (x \notin A_j) \\
\iff \quad & \forall j \in J (x \in X \ \& \ x \notin A_j) \\
\iff \quad & \forall j \in J (x \in X \setminus A_j) \\
\iff \quad & x \in \bigcap_{j \in J} (X \setminus A_j)
\end{aligned}
$$

3. Olkoon $f \colon X \to Y$ funktio.
   (a) Jos $A, B \subset X$, päteekö välttämättä $f[A \cap B] = f[A] \cap f[B]$?
   (b) Jos $A, B \subset Y$, päteekö välttämättä $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$?

Ratkaisu. (a) Ei päde: esimerkiksi jos $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on $f(x) = x^2$, $A = \{-4\}$ ja $B = \{4\}$, jolloin $f[A \cap B] = f[\varnothing] = \varnothing \neq \{16\} = \{16\} \cap \{16\} = f[A] \cap f[B]$.

(b) Pätee. Olkoon $x \in f^{-1}[A \cap B]$. Alkukuvan määritelmän nojalla tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että $f(x) \in A \cap B$, eli $f(x) \in A$ ja $f(x) \in B$ ja tämä taas on ekvivalenttia sen kanssa, että $x \in f^{-1}A$ ja $x \in f^{-1}B$, eli $x \in f^{-1}A \cap f^{-1}B$.

4. Osoita, että jos $f \colon X \to Y$ on funktio ja $A_i \subset X$, $i \in I$, niin
   (a) $f\Big[\bigcup_{i \in I} A_i\Big] = \bigcup_{i \in I} f[A_i]$
   (b) $f\Big[\bigcap_{i \in I} A_i\Big] \subset \bigcap_{i \in I} f[A_i]$
   (c) Olkoon $B \subset Y$, päteekö välttämättä $f^{-1}[Y \setminus B] = X \setminus f^{-1}B$?

Ratkaisu. (a). Olkoon $x \in f\Big[\bigcup_{i \in I} A_i\Big]$. Nyt

$$
\begin{aligned}
& x \in f\Big[\bigcup_{i \in I} A_i\Big] \\
\iff \quad & \text{on olemassa } y \in \bigcup_{i \in I} A_i \text{ jolle } x = f(y) \\
\iff \quad & \text{jollain } i \in I \text{ on olemassa } y \in A_i \text{ jolle } x = f(y) \\
\iff \quad & \text{jollain } i \in I, x \in f[A_i] \\
\iff \quad & x \in \bigcup_{i \in I} f[A_i]
\end{aligned}
$$

(b). Olkoon $x \in f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right]$

$$\begin{aligned}
& x \in f\Big[\bigcap_{i\in I} A_i\Big] \\
\iff\quad & \text{on olemassa } y \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ jolle } x = f(y) \\
\iff\quad & \text{on olemassa } y \text{ joka on joukossa } A_i \text{ jokaisella } i \text{ ja jolle } x = f(y) \\
\overset{*}{\Longrightarrow}\quad & \text{kaikilla } i \in I, x \in f[A_i] \\
\iff\quad & x \in \bigcap_{i\in I} f[A_i]
\end{aligned}$$

Huom. implikaatiota $*$ ei voi kääntää. Toisesta suunnasta vastaesimerkkinä toimii edellisen tehtävän (a)-kohdan ratkaisu.

(c). Pätee. Olkoon $x \in f^{-1}[Y \setminus B]$. Tämä on ekvivalenttia sen kanssa, että $f(x) \in Y \setminus B$, eli $f(x) \notin B$, toisin sanoin väite "$f(x) \in B$" ei pidä paikkaansa, eli väite "$x \in f^{-1}B$" (joka tarkoittaa samaa asiaa) ei pidä paikkaansa, joka on puolestaan ekvivalentti sen kanssa, että $x \in X \setminus f^{-1}B$.

5. Olkoon $f\colon X \to Y$. Osoita, että

   (a) f on injektio jos ja vain jos $f^{-1}fA = A$ kaikilla $A \subset X$,

   (b) f on surjektio jos ja vain jos $ff^{-1}A = A$ kaikilla $A \subset Y$.

Ratkaisu. (a). Oletetaan, että f on injektio. Jos $x \in A$, niin $f(x) \in fA$. Argumentin selkeyden vuoksi merkitään $B = fA$. Siispä $f(x) \in B$. Tästä seuraa, että x on B:n alkukuvassa: $x \in f^{-1}B$, mutta sijoittamalla takaisin saadaan $x \in f^{-1}fA$, eli $A \subset f^{-1}fA$ (huom. tässä ei käytetty sitä oletusta, että f on injektio). Seuraavaksi pitäisi osoittaa, että $f^{-1}fA \subset A$. Tehdään vastaoletus: on olemassa piste $x \in (f^{-1}fA) \setminus A$. Koska $x \in f^{-1}fA$, on $f(x) \in fA$. Tästä seuraa, että on olemassa $y \in A$, jolle $f(y) = f(x)$, mutta koska $x \notin A$ ja $y \in A$, on oltava $x \neq y$. Löysimme siis kaksi *eri* pistettä x ja y jotka kuvautuvat samaksi pisteeksi, mikä on ristiriita, sillä oletimme, että f on injektio.

Oletetaan sitten että f *ei ole* injektio. On osoitettava, että jollain A pätee $f^{-1}fA \neq A$. Koska f ei ole injektio löytyy lähtöjoukosta kaksi *eri* pistettä x_1 ja x_2 joille $f(x_1) = f(x_2) = y$. Olkoon $A = \{x_1\}$. Nyt $f^{-1}fA = f^{-1}f\{x_1\} = f^{-1}\{y\} \supset \{x_1, x_2\}$, eli $x_2 \in f^{-1}fA$, mutta $x_2 \notin A$, täten $f^{-1}fA \neq A$.

(b). Oletetaan, että f on surjektio. Jos $x \in A \subset Y$, niin koska f on surjektio, löytyy $y \in X$ jolle $f(y) = x$ ja $y \in f^{-1}A$. Tästä seuraa kuvan määritelmän mukaan, että $f(y) \in ff^{-1}A$, mutta toisaalta $x = f(y)$, eli $x \in ff^{-1}A$ niin kuin pitikin. Oletetaan sitten, että f ei olekaan surjektio. Silloin maalijoukossa on alkio $y_0 \in Y$ joka ei ole kuvajoukossa, eli kaikille $x \in X$ pätee $f(x) \neq y_0$. Valitaan $A = \{y_0\}$. Nyt $f^{-1}A = \varnothing$, koska mikään alkio ei kuvaudu y_0:lle. Edelleen $ff^{-1}A = f[\varnothing] = \varnothing \neq A$.