

Topologia I

Lämmittelytehtävät

08.09.2011

- (a) Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sin t$, määrää $f^{-1}[\mathbb{R}_+]$
- (b) Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\sin t, \cos t)$, määrää $f^{-1}\{(0, 1)\}$
- (c) $f(t) = t^3$, määrää $f[-1, 1]$ ja $f^{-1}[-1, 1]$
- (d) Jokaisella n määritellään funktio $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx$. Määrää $\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[-1, 1]$ ja $\bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[0, 1]$
- (e) Todista: $A \subset B \Rightarrow f^{-1}A \subset f^{-1}B$ ja $A \subset B \Rightarrow fA \subset fB$.
- (f) Anna esimerkki joukoista A ja B ja funktiosta f joille pätee, että $A \neq B$, mutta $fA = fB$.
- (g) Olkoon $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$ ja $f: X \rightarrow Y$. Osoita, että $f^{-1}\{y_1\} \cap f^{-1}\{y_2\} = \emptyset$.
- (h) Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\sin t, \cos t)$ ja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = x$. Määrää $(g \circ f) \left\{ \frac{\pi n}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, $(g \circ f)^{-1}[-1, 1]$ ja $(g \circ f)^{-1}[0, 1]$
- (i) Jokaisella $n \in \mathbb{N}$ määritellään $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = n(x^2 + 3x + 1)$. Määrää

$$\mathbb{Q} \cap \bigcap_{n=0}^{\infty} f_n^{-1}[-1, 1].$$