Reaaliarvosten funktioiden jatkuvuus.

Torstaina 29.09.2011 kävimme asiat vähän eri tavalla kuin ne on esitetty Väisälän kirjassa. Seuraavassa on luennon muistiinpanot.

1 Lemma. *Jos* $]a_i, b_i[\, \subset \mathbb{R}$ *ovat avoimia välejä,* $0 \leqslant i \leqslant n$*, niin*

$$\prod_{i=1}^{n} \,]a_i, b_i[\, = \,]a_1, b_1[\, \times \cdots \times \,]a_n, b_n[$$

on avoin joukko $\mathbb{R}^n$*:ssä.*

Todistus. Olkoon $x \in \prod_{i=1}^{n} \,]a_i, b_i[$, jolloin $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja jokaisella i, $a_i < x_i < b_i$. Tavoitteena on löytää x:llä kuulaympäristö, joka sisältyy joukkoon $\prod_{i=1}^{n} \,]a_i, b_i[$. Olkoon

$$\varepsilon = \min\{|x_1 - a_1|, |x_1 - b_1|, \ldots, |x_n - a_n|, |x_n - b_n|\},$$

jolloin ε on tarpeeksi pieni siihen, että jokaisella i pätee $]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\, \subset \,]a_i, b_i[$, eli

$$\prod_{i=1}^{n} \,]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\, \subset \Pi_{i=1}^{n} \,]a_i, b_i[\,.$$

Nyt riittää osoittaa, että

$$B(x, \varepsilon) \subset \prod_{i=1}^{n} \,]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[\,, \tag{1}$$

jolloin $B(x, \varepsilon)$ on etsitty kuula. Todistaaksemme väite (1), olkoon $y \in B(x, \varepsilon)$. Nyt tiedetään, että

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} < \varepsilon, \tag{2}$$

mikä on ekvivalenttia sen kanssa, että

$$(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 < \varepsilon^2.$$

Koska summan kaikki termit ovat positiivisia, seuraa tästä, että

$$|x_i - y_i| < \varepsilon$$

pätee jokaisella i, joka tarkoittaa täsmälleen sitä että $y_i \in \,]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$, eli $y \in \prod_{i=1}^{n} \,]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$. □

2 Määritelmä (Kirja 5.5)**.** Olkoon $n, j \in \mathbb{N}$ luonnollisia lukuja $j \leqslant n$. Määritellään *projektiokuvaus*

$$\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

asettamalla $\mathrm{pr}_j(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_j$.

3 Lause (Kirja 5.6)**.** *Yllä määritelty* pr_j *on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, merkitään $y = \operatorname{pr}_j(x) = x_j$ ja olkoon U mikä tahansa y:n ympäristö. Lauseen 4.7(2) nojalla riittää löytää sellainen pisteen x ympäristö V, että $\operatorname{pr}_j V \subset U$. Koska U on avoin (ympäristön määritelmä 3.8), on olemassa $\varepsilon > 0$ siten että $B(y, \varepsilon) \subset U$ (avoimen joukon määritelmä 3.1). Koska kyseessä on reaaliakseli, $B(y, \varepsilon) =]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$. Olkoon $V = \prod_{i=1}^n]x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon[$. Lemman 1 nojalla V on avoin ja koska se sisältää pisteen x, se on sen ympäristö. Jos $z \in V$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$, niin $|x_i - z_i| < \varepsilon$ kaikilla i. Toisaalta $\operatorname{pr}_j z = z_j$, eli myös $|\operatorname{pr}_j z - y| = |z_j - y| = |x_j - y_j| < \varepsilon$, eli $\operatorname{pr}_j z \in B(y, \varepsilon)$. Tästä seuraa että $\operatorname{pr}_j V \subset B(y, \varepsilon) \subset U$, mikä oli todistettavana. □

4 Lause (Kirja 4.12)**.** *Jos* $f\colon X \to Y$ *ja* $g\colon Y \to Z$ *ovat jatkuvia, niin* $g \circ f$ *on jatkuva.*

Huomautus. Tässä ja myöhemminkin kurssilla, *jatkuva* tarkoittaa *jatkuva kaikissa pisteissä* eli *jatkuva kaikkialla.* Tämä lause on siis vain osa kirjan lausetta 4.12.

Todistus. Lauseen 4.8 nojalla riittää näyttää, että kuvauksessa $g \circ f$ avoimen joukon alkukuva on avoin. Olkoon $V \subset Z$ avoin. Koska g on jatkuva, on $g^{-1}V$ avoin. Koska f on jatkuva, on tämän alkukuva $f^{-1}g^{-1}V$ myös avoin. Toisaalta (Lause 0.8(8)) $f^{-1}g^{-1}V = (g \circ f)^{-1}V$, joka on V:n alkukuva kuvauksessa $g \circ f$, eli saatiin, että se on avoin. □

5 Lause. *Olkoon* $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *joku funktio ja merkitään* $f_j = \operatorname{pr}_j \circ f$*. Funktio* f *on jatkuva jos ja vain jos* f_j *on jatkuva kaikilla* $1 \leqslant j \leqslant n$*.*

Todistus. Oletetaan, että f on jatkuva. Lauseen 3 nojalla pr_j on jatkuva, joten yllä todistetun Lauseen 4.12 nojalla $\operatorname{pr}_j \circ f = f_j$ on jatkuva.

Oletetaan, että jokainen f_j on jatkuva. Olkoon $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Merkitään $y = f(x)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ Jatkuvuuden määritelmän nojalla, riittää löytää pisteen x ympäristö V niin että $fV \subset B(y, \varepsilon)$ (että tämä todella riittää, ei teknisesti ottaen ole mikään todistettu lause; miten johdat tämän olleista lauseista 4.7, 4.8 ja määritelmästä 4.1?). Tätä varten valitaan ensin $r = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, jolloin

$$\prod_{i=1}^n]y_i - r, y_i + r[\subset B(y, \varepsilon).$$

Tämä on helppo tarkistaa (tee se). Jokaisella i, väli $]y_i - r, y_i + r[$ on pisteen y_i ympäristö, joten sen alkukuva on avoin joukko $A_i \subset X$. Avointen joukkojen äärellinen leikkaus on avoin (Lause 3.9), joten $V = \bigcap_{i=1}^n A_i$ on avoin. Toisaalta, jos $z \in V$, niin $f_i(z) \in]y_i - r, y_i + r[$, mistä seuraa, että

$$f(z) \in \prod_{i=1}^n]y_i - r, y_i + r[\subset B(y, \varepsilon),$$

mikä oli todistettavana. □

6 Määritelmä. Olkoon $S\colon \mathbb{R}^n : \mathbb{R}$ *summafunktio* $S(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \cdots, x_n$.

7 Lause. *Summafunktio* $S\colon \mathbb{R}^n : \mathbb{R}$ *on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$. Täytyy löytää $\delta > 0$ niin että $S[B(x, \delta)] \subset B(S(x), \varepsilon)$. Olkoon $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$. Jos nyt $y \in B(x, \delta)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, niin saadaan

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| &= |x_1 + \cdots + x_n - y_1 - \cdots - y_n| \\ &\leqslant |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \\ &\leqslant n\delta \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa reaalilukujen kolmioepäyhtälöstä. Toinen seuraa siitä, että $y \in B(x, \delta)$, mistä saadaan kuten Lemman 1 todistuksessa kohdassa (2), että $|x_i - y_i| < \delta$ kaikilla i (muuten olisi $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} \geqslant \sqrt{(x_i - y_i)^2} \geqslant \delta$). $\square$

8 Määritelmä. Olkoon $T\colon \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}$ *tulofunktio* $T(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

9 Lause. *Tulofunktio* $T\colon \mathbb{R}^2 : \mathbb{R}$ *on jatkuva.*

Todistus. Olkoon $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\varepsilon > 0$. Täytyy löytää $\delta > 0$ niin että $T[B(x, \delta)] \subset B(T(x), \varepsilon)$. Luvun δ valinta tässä tapauksessa ei ole ihan yksinkertainen, ja selkeyden vuoksi sopivan δ:n olemassaolon osoittaminen jätetään tämän todistuksen loppuun. Toistaiseksi oletetaan, että δ on vain joku positiivinen luku. Oletetaan, että $y \in B(x, \delta)$, $y = (y_1, y_2)$.

Nyt voidaan arvioida:

$$\begin{aligned} |T(x) - T(y)| &= |x_1 x_2 - y_1 y_2| \\ &= |x_1 x_2 - y_1 x_2 + y_1 x_2 - y_1 y_2| \\ &= |x_2(x_1 - y_1) + y_1(x_2 - y_2)| \\ &\leqslant |x_2||x_1 - y_1| + |y_1||x_2 - y_2| \\ &\overset{*}{\leqslant} |x_2||x_1 - y_1| + (|x_1| + \delta)|x_2 - y_2| \\ &\leqslant |x_2|\delta + (|x_1| + \delta)\delta \\ &= \delta^2 + (|x_1| + |x_2|)\delta \end{aligned}$$

Kohta $*$ seuraa siitä, että $y_1 \in \,]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$, mistä puolestaan seuraa, että $|y_1| \leqslant |x_1| + \delta$.

On siis valittava δ niin, että pätisi

$$\delta^2 + (|x_1| + |x_2|)\delta < \varepsilon. \tag{3}$$

Yhtälöstä

$$\delta^2 + (|x_1| + |x_2|)\delta - \varepsilon = 0$$

voidaan ratkaista, että

$$\delta = \frac{-|x_1| - |x_2| \pm \sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2 + 4\varepsilon}}{2}.$$

Diskriminantti on positiivinen, koska $\varepsilon > 0$. Toisaalta $\sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2 + 4\varepsilon} > \sqrt{(|x_1| + |x_2|)^2} = |x_1| + |x_2|$, joten yhtälön oikeanpuolimmainen ratkaisu on positiivinen. Tästä seuraa, että epäyhtälön (3) toteuttava positiivinen δ on mahdollista aina löytää. $\square$