Topologia I: Esitelmien aiheita.

1. Olkoon X kaikkien epätyhjien suljettujen ja rajoitettujen $\mathbb{R}^n$:n osajoukkojen joukko, $X = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ kompakti ja epätyhjä}\}$. Olkoon $d(F, G) = \inf\{r \in \mathbb{R} \mid (F \subset B(G, r))\&(G \subset B(F, r))\}$, missä $B(A, r)$ on joukon A r-pullistuma (kirja). Osoita, että d on metriikka X:ssä.

2. **Varattu.** Tulometriikka, kirjasta 10.8, 10.9, 10.11 ja 10.12.

3. Rajoitetut ja rajoittamattomat joukot, lauseet 2.14, 2.15 ja esimerkki 2.16. Lisäksi voit esittää omia esimerkkejä ja ratkaista jokin tehtävä 2.10 tai 2.12 tai molemmat.

4. **Varattu.** Sisätulo ja sen yhteys normiin ja metriikkaan.

5. Mitä jos jättää aksiooman M3 toisen suunnan pois? Eli $d(x, y)$ saa olla nolla, vaikka $x \neq y$. Saman teorian avoimista ja suljetuista joukoista voi kehittää. Esitelmän aiheena olisi esittää kurssin alkupään määritelmät ja teoreemat (2.6, 3.1, 3.2, 3.4, 3.5 ja 3.9) kiinnittäen erityistä huomiota siihen, että aksioomaa M3 ei tarvita ja jos tarvitaan niin miten. Lopuksi voi tarkastella miten jatkuva kuvaus käyttäytyy: jos $d(x, y) = 0$, niin miten pisteet x ja y kuvautuvat jatkuvassa kuvauksessa?

6. Relatiivitopologia, luku 7.

7. Metriikkojen ekvivalenssi, luvun 10 alkuosa.

8. Olkoon $X = 2^{\mathbb{N}}$ kaikkien funktioiden $f\colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ joukko. Määritellään $d(f, g) = 0$ kun $f = g$ ja $d(f, g) = 2^{-\min\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}}$. Osoita, että d on metriikka X:ssä ja tutki sen ominaisuuksia. Tästä aiheesta voi tehdä sekä yksinkertaisen että vaativan esitelmän. Miksei kaksi esitelmää. Voi esim. osoittaa, että X on homeomorfinen Cantorin joukon kanssa; täysin epäyhtenäinen (eli jokaisella kahdella pisteellä f ja g on olemassa erilliset ympäristöt U ja V siten että $U \cup V = X$); kompakti jne..

9. Yhtenäisyys (luku 14):
    - Topologin käyrä: (14.24) yhtenäinen muttei polkuyhtenäinen.
    - Sovellus: miksi $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}^2$ eivät ole homeomorfisia keskenään, eli miksi ne ovat topologisesta näkökulmasta erilaisia? (14.29)
    - Toinen todistus Bolzanon lauseelle. Esitelmässä voi esitellä sekä tavanomaisen Analyysi I:n todistuksen, että yhtenäisyyteen perustuvan todistuksen.

10. **Varattu.** Banachin kiintopistelause: lause ja todistus.

11. **Varattu.** Heine-Borelin lause (kompaktit joukot $\mathbb{R}^n$:ssä ovat täsmälleen kaikki suljetut ja rajoitetut joukot).

12. Banachin kiintopistelauseen sovelluksia:

    - Neliöjuurialgoritmit: $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{k}{x_n})$. Miksi tämä jono suppenee kohti lukua $\sqrt{k}$ riippumatta siitä mistä luvusta aloittaa (eli riippumatta x_0:sta)? Päättele miten nopeasti jono suppenee kohti raja-arvoaan, eli miten paljon etäisyys pienenee joka askeleella. Keksitkö algoritmin neljännen juuren laskemiselle $\sqrt[4]{k}$? Entä kuutiojuuren $\sqrt[3]{k}$?
    - Tiettyjen differentiaaliyhtälöiden/integraaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolo.

13. Baireen lause: täydellisessä avaruudessa numeroituva leikkaus tiheistä ja avoimista joukoista on epätyhjä. Sovellus: sellaisia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jotka ovat jatkuvia, mutta ei missään derivoituvia, on tiheässä. Lause 10.8. Jussi Väisälän kirjassa Topologia II (huom! ei I).

14. Brouwerin kiintopistelause: verkkoteoreettinen lähestymistapa.

15. Yleiset topologiset avaruudet: 3.13 kirjassa Topologia I ja luku 1 kirjassa Topologia II. Esitelmässä voi esitellä esimerkkejä omituisista topologisista avaruuksista: kirjasta Topologia II, esim. Esimerkki 1.2, teht. 1:3 puoliavoimien välien virittämä topologia.

16. Yleiset topologiset avaruudet ja kompaktius: esimerkki jonokompaktista ei-kompaktista ja/tai toisin päin.