

Matematiikka tutuksi, syksy 2011

HY, Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Harjoitus 4

1. Mitkä seuraavista lukujonoista ovat aritmeettisiä ja mitkä geometrisia? Laske aritmeettisten ja geometrinen lukujonojen sadannet termit.

- (a) 3, 5, 8, 13, 21, ...
- (b) 16, 35, 54, 73, ...
- (c) 7, 21, 63, ...
- (d) 1, 1, 1, 1, ...
- (e) 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001 ...

2.

- (a) Mikä on lukujonon 5, 13, 21, 29, 37, ... kahdensadan ensimmäisen jäsenen summa?
- (b) Mikä on lukujonon 3, 9, 27, 81, ... kahdenkymmenenseitsemän ensimmäisen jäsenen summa?

3. Todista induktiolla geometrisen jonon summakaava, eli että jos g_1, g_2, \dots on geometrinen jono, jonka peräkkäisten termien suhde on q , niin

$$\sum_{k=1}^n g_k = g_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

4. Todista induktiolla, että jos A_1, A_2, \dots, A_n ovat äärellisiä joukkoja, joissa on jokaisessa enintään k alkioita, eli $|A_i| \leq k$ jokaisella i , niin

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| \leq n \cdot k.$$

Merkintä $|A|$ tarkoittaa joukon A alkioiden lukumäärää, eli joukon kokoa. Voit pitää tunnettuna tietoa, että kahden joukon yhdisteen koko on enintään joukkojen kokojen summa.

5. Todista induktiolla, että millä tahansa luonnollisella luvulla n pätee:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3 - n).$$

6. Määritellään lukujonot (a_n) ja (b_n) :

$$a_n = 1 - 2^{1-n} \quad \text{ja} \quad b_1 = 0, \quad b_{n+1} = \frac{b_n + 1}{2}.$$

Todista induktiolla luvun n suhteen, että $a_n = b_n$ jokaisella n .