Matemaattinen logiikka

Harjoitus 9

1. Näytä, että funktio $\pi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $\pi(x,y) = ((x+y)^2 + 3x + y)/2$, on bijektio.

2. Näytä, että funktio $syt(x,y) =$ x:n ja y:n suurin yhteinen tekijä on primitiivirekursiivinen funktio.

3. Oletetaan, että $g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ovat primitiivirekursiivisiä ja että $g(0) = 0$ ja jos $n > 0$ niin $g(n) < n$. Määritellään funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ siten, että $f(n) = 0$ jos $n = 0$ ja muuten $f(n) = h(f(g(n)))$. Näytä, että f on primitiivirekursiivinen.

4. Määritellään rekursiolla sanat:
(i) 010 on sana,
(ii) 0101 on sana,
(iii) jos A ja B ovat sanoja, niin $AB1$ on sana
(eli esim. 01001011 on sana). Näytä, että

$$X = \{n \in \mathbb{N} |\ (n)_0 (n)_1 ... (n)_{(len(n) \dot{-} 1)} \text{ on sana}\}$$

on primitiivirekursiivinen relaatio. (Vihje: Huomaa, että $n \in X$ joss x koodaa jomman kumman jonoista 010 ja 0101 tai löytyy $m \in X$ ja $k \in X$ jotka ovat pienempiä kuin n ja n:n koodaama merkkijono saadaan liittämällä m:n ja k:n koodaamat jonot peräkkäin ja lisäämällä merkki 1 perään.)

5. Olkoon $L^* = L \cup \{f\}$, missä f on 1-paikkainen funktiosymboli. Olkoon M^* L^*-struktuuri ja $M = M^* \restriction L$ eli L-struktuuri, joka saadaan M^*:stä jättämällä f:n tulkinta pois. Oletetaan, että f^{M^*} on määriteltävä M:ssä. Näytä, että kaikilla L^*-termeillä $t(v_0, ..., v_n)$, kaavan $t = v_{n+1}$ M^*:ssä määrittelemä relaatio on määriteltävä jo M:ssä.

6. Tehtävän 5 oletuksilla, näytä, että jokainen M^*:n määriteltävä relaatio on määriteltävä jo M:ssä.