Matemaattinen logiikka

Harjoitus 8

1. Sanotaan että relaation $R^M \subseteq M^2$ on hyvin perustettu jos ei löydy alkioita $x_i \in M$, $i \in \mathbb{N}$, joilla $(x_{i+1}, x_i) \in R^M$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Näytä, että jos teorian T jokaisessa mallissa M, R^M on hyvinperustettu, niin löytyy luonnollinen luku n niin että mistään $M \models T$ ei löydy alkioita $x_i \in M$, $i \leq n$, joilla $(x_{i+1}, x_i) \in R^M$ kaikilla $i < n$.

2. Olkoon T $\{f\}$-teoria, joka koostuu lauseesta

$$\forall v_0((\neg f(v_0) = v_0) \wedge f(f(v_0)) = v_0)$$

sekä jokaisella $n \in \mathbb{N}$ lauseesta

$$\forall v_0 ... \forall v_n \exists v_{n+1} \bigwedge_{i \leq n} \neg v_i = v_{n+1}.$$

Näytä, että T on täydellinen. (Vihje: Näytä ensin, että jokaisesta T:n mallista M löytyy $X \subseteq M$ s.e. $f^M \restriction X$ on bijektio $X \to (M - X)$.)

3. Näytä, että löytyy funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla kaikilla primitiivirekursiivisilla $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, löytyy $n \in \mathbb{N}$ niin että $f(x) > g(x)$ kun $x > n$. (Vihje: Primitiivirekursiivisia funktioita on vain numeroituva määrä.)

4. Näytä, että funktiot $c(y, x) = x^y$ ja $C_k(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$, ovat primitiivirekursiivisiä.

5. Näytä suoraan määritelmään vetoamalla, että funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 3^x + 1$, on primitiivirekursiivinen (yritä keksiä kätevä ratkaisu).

6. Oletetaan, että R on 1-paikkainen primitiivirekursiivinen relaatio. Merkitään $R_n = \{x \in R |\ x < n\}$. Näytä, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on primitiivirekursiivinen kun $f(n)$ on joukon R_n alkioiden lukumäärä kaikilla $n \in \mathbb{N}$.