Matemaatinen Logiikka

Harjoitus 7

1. Oletetaan, että $L_n$, $n \in \mathbb{N}$, ovat aakkostoja joilla $L_n \subseteq L_m$ kun $n < m$ ja $\phi_i$, $i \in \mathbb{N}$, listaa kaikki $L$-kaavat, missä $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$. Kaikilla $i \in \mathbb{N}$, määritellään $\psi_i$ seuraavasti: $\psi_i = \phi_j$, missä $j$ on pienin luonnollinen luku jolla

(a) $\phi_j$ on muotoa $\forall v_k \theta$ oleva $L_i$-lause,

(b) $\phi_j \notin \{\psi_n | \ n < i\}$.

Näytä, että kaikilla muotoa $\forall v_k \theta$ olevilla $L$-lauseilla $\theta'$ löytyy $i \in \mathbb{N}$ jolla $\psi_i = \theta'$.

2. Olkoon $T$ $L$-teoria siten, että jokaisessa $L$-struktuurissa ainakin jokin $\phi \in T$ on tosi. Osoita, että on olemassa $\phi_0, ..., \phi_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $\vdash \phi_0 \vee ... \vee \phi_n$.

3. Olkoon $L = \{c_i | \ i \in \mathbb{N}\}$ ja $T$ sellainen $L$-teoria, että jokaisella $M \models T$ ja $a \in M$ löytyy sellainen $i \in \mathbb{N}$, että $c_i^M = a$. Näytä, että on olemassa $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ jolla $T \vdash \bigvee_{k<m\leq n} c_k = c_m$, missä $\bigvee_{k<m\leq n} c_k = c_m$ tarkoittaa kaavaa

$$c_0 = c_1 \vee c_0 = c_2 \vee ... \vee c_0 = c_n \vee c_1 = c_2 \vee ... \vee c_{n-1} = c_n.$$

4. Olkoon $M = (\{0, 1, 2\}, \{0\})$ $\{P\}$-struktuuri. Etsi $\{P\}$-lause $\phi$ siten, että $M \models \phi$ ja $\{\phi\}$ on täydellinen teoria.

5. Olkoon $L = \emptyset$ ja $T = \{\forall v_0(v_0 = v_0)\}$ $L$-teoria. Näytä, että $T$ on $\aleph_0$-kategorinen (eli $T$:n numeroituvasti äärettömät mallit ovat keskenään isomorfisia) mutta ei täydellinen.

6.Näytä, että $Th((\mathbf{Z}, <))$ (missä $<$ on kokonaislukujen luonnollinen järjestys) ei ole $\aleph_0$-kategorinen.