

Matemaattinen logiikka

Harjoitus 3

1. Ovatko struktuurit $(\mathbf{R}, <)$ ja $(\mathbf{R} - \{0\}, <)$ isomorfiset?
2. Ovatko struktuurit $(\mathbf{Z}, +)$ ja $(\mathbf{Q}, +)$ isomorfiset?
3. Olkoon $S : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ sellainen, että $S(z) = z + 1$ kaikilla $z \in \mathbf{Z}$. Näytä, että struktuurin (\mathbf{Z}, S) automorfismiryhmä $(\text{Aut}((\mathbf{Z}, S)), \circ)$ on isomorfinen ryhmän $(\mathbf{Z}, +)$ kanssa.
4. Olkoon A propositiolause, jossa esiintyy vain propositiosymboleja p_0, \dots, p_n ja olkoot ϕ_0, \dots, ϕ_n L -kaavoja. Näytä, että jos ϕ on merkkijono, joka on saatu A :sta korvaamalla propositiosymbolit p_i L -kaavoilla ϕ_i , $i \leq n$, niin ϕ on L -kaava.
5. Näytä (suoraan Tarskin totuusmääritelmään vetoamalla), että $(\mathbf{Z}, +) \models \forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 (v_0 + v_2 = v_1)$.
6. Olkoon X epätyhjä joukko ja $R \subseteq X^2$. Näytä (suoraan Tarskin totuusmääritelmään vetoamalla), että R on asymmetrinen jos ja vain jos $(X, R) \models \forall v_0 \forall v_1 (R(v_0, v_1) \rightarrow \neg R(v_1, v_0))$.