Matemaattinen logiikka

Harjoitus 12

1. Näytä, että jokainen ääretön rekursiivisesti numeroituva joukko sisältää äärettömän rekursiivisen joukon.

2. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^3$ on rekursiivinen relaatio. Näytä, että relaatio

$$\forall z \leq x \exists y R(x, y, z)$$

on rekursiivisesti numeroituva.

3. Olkoon $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ rekursiivinen ja A niiden $n \in \mathbb{N}$ joukko joilla on olemassa $> n$ monta sellaista $m \in \mathbb{N}$, että $f(m) = n$. Näytä, että A on rekursiivisesti numeroituva.

4. Näytä, että joukko

$$\{\ulcorner\phi\urcorner |\ PA_{exp} \not\vdash \phi,\ PA_{exp} \not\vdash \neg\phi,\ \phi\ L_{exp} - \text{lause}\}$$

ei ole rekursiivisesti numeroituva.

5. Olkoon $L = L_{exp} - \{exp\}$. Näytä, että

$$\{\ulcorner\phi\urcorner |\ (\mathbf{R}, +, \times, 0, 1) \models \phi,\ \phi \text{ on } L\text{-lause}\}$$

on rekursiivinen joukko. Tehtävässä saa käytää tietoa, että löytyy L-teoria T (reaalisuljettujen kuntien teoria) jolle pätee:

(i) $(\mathbf{R}, +, \times, 0, 1) \models T$,
(ii) $\{\ulcorner\phi\urcorner |\ \phi \in T\}$ on primitiivirekursiivinen.
(iii) T on täydellinen.