Matemaattinen logiikka

Harjoitus 11

1. Oletetaan, että $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on rekursiivinen. Näytä, että löytyy L_{exp}-lause ϕ jolla $\mathcal{N}_{exp} \models \phi$ jos ja vain jos $f(\ulcorner\phi\urcorner) = \ulcorner\phi\urcorner$.

2. Määritellään F-funktioiden perhe seuraavasti:
(i) funktiot Z, S, $+$ and Pr_i^n ovat F-funktioita,
(ii) jos $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ ja $g_i : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, ovat F-funktioita niin myös $h(x_1, ..., x_m) = f(g_1(x_1, ..., x_m), ..., g_n(x_1, ..., x_m))$ on F-funktio.
Näytä, että kertolasku ei ole F-funktio (Vihje: Tarkastele kertolaskun kasvunopeutta).

3. Olkoon SMK niiden $(x, y, i) \in \mathbb{N}^3$ joukko joilla löytyy L_{exp}-kaava ϕ ja L_{exp}-termi t niin, että $\ulcorner\phi\urcorner = x$, $\ulcorner t\urcorner = y$ ja t on sijoitettavissa muuttujaan v_i kaavassa ϕ. Näytä, että SMK on primitiivirekursiivinen.

4. Näytä, että joukko $TA = \{\ulcorner\phi\urcorner \mid \mathcal{N}_{exp} \models \phi,\ \phi \text{ on atomilause}\}$ on primitiivirekursiivinen.

5. Olkoon P 1-paikkainen predikaattisymboli ja $L = L_{exp} \cup \{P\}$. L-kaavoille voidaan määritellä Gödel numerointi kuten L_{exp}-kaavoille. Löytyykö $P^N \subseteq \mathbb{N}$ niin, että kaikilla L-lauseilla ϕ, $N = (\mathbb{N}, +, \times, exp, P^N, 0, 1) \models \phi$ jos ja vain jos $\ulcorner\phi\urcorner \in P^N$? Perustele vastauksesi, varsinaista todistusta ei tarvitse antaa.

6. Olkoon n pienin luonnollinen luku, jota ei voi määritellä suomenkielisellä ilmauksella jossa on enintäin tuhat kirjainta. Mitä voit sanoa luvusta n? Entä pieninmästä luonnollisesta luvusta, jota ei voi määritellä L_{exp}-lauseella jossa on enintäin tuhat merkkiä?