Matemaattinen logiikka

Harjoitus 10

1. Olkoon $R \subseteq \mathbb{N}^2$ relaatio, jolla on seuraava ominaisuus: Kaikilla primitiivirekursiivisilla $S \subseteq \mathbb{N}$ löytyy $n \in \mathbb{N}$ niin, että kaikilla $m \in \mathbb{N}$, $m \in S$ jos ja vain jos $(n, m) \in R$. Näytä, että R ei ole primitiivirekursiivinen.

2. Näytä, että ääretön $R \subseteq \mathbb{N}$ on rekursiivinen jos ja vain jos on olemassa aidosti kasvava rekursiivinen funktio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jolla $R = \{f(n) |\ n \in \mathbb{N}\}$.

3. Oletetaan, että $R \subseteq \mathbb{N}^2$ on rekursiivinen ja että jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa vähintäin $n + 1$ kappaletta luonnollisia lukuja m, joilla $(n, m) \in R$. Näytä, että on olemassa rekursiivinen injektio $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jolla $(n, f(n)) \in R$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

4. Todista:
   (i) $A(y, x) > x$,
   (ii) $A(y, x + 1) > A(y, x)$,
   (iii) $A(y + 1, x) \geq A(y, x + 1)$,
   (iv) $A(x, y) > max\{y, x\}$.

5. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f, g)$ struktuuri, missä $+$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavalliset yhteenlasku ja järjestys, g on yksipaikkainen funktio ja $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, ..., a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä suoraan määritelmiin vetoamalla, että funktio $h(n) = g^n(n)$ on määriteltävä struktuurissa N, missä $g^0(x) = x$ ja $g^{n+1}(x) = g(g^n(x))$.

6. Olkoon $N = (\mathbb{N}, +, 0, 1, \leq, f)$ struktuuri, missä $+$ ja $\leq$ ovat luonnollisten lukujen tavalliset yhteenlasku ja järjestys ja $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on sellainen, että kaikilla $k \in \mathbb{N}$ ja $a_0, ..., a_k \in \mathbb{N}$ löytyy $x \in \mathbb{N}$ jolla kaikilla $i \leq k$, $f(x, i) = a_i$. Näytä suoraan määritelmiin vetoamalla, että kertolasku on määriteltävä struktuurissa N.