

# Matemaattinen Logiikka

## Harjoitus 1

1. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan lauseita (perustele vastauksesi):

- (a)  $(p_1)$
- (b)  $((p_0 \rightarrow \neg p_1) \rightarrow p_0)$
- (c)  $(p_0 \rightarrow \neg p_1)(p_0 \rightarrow p_0)$ .

2. Mitkä seuraavista ovat propositiologiikan aksioomeja kun  $A, B$  ja  $C$  ovat propositiolauseita (perustele vastauksesi):

- (a)  $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$
- (b)  $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow (A \rightarrow B)))$
- (c)  $(p_0 \rightarrow (p_2 \rightarrow C))$ .

Tehtävien 3 ja 4 kaltaisissa tehtävissä etsimme aina ratkaisua, joka ei käytä täydellisyyslauseetta. Muita monisteen lauseita, kuten Deduktiolauseetta, saa käyttää (ellei muuta sanota).

3. Näytä, että  $\vdash (\neg\neg A \rightarrow A)$ .

4. Näytä, että  $\vdash (A \rightarrow (A \vee B))$

5. Näytä, että seuraavat ovat yhtäpitäviä:

- (i)  $S \vdash A$ ,
- (ii) on olemassa äärellinen jono  $(A_i)_{i \leq n}$  propositiolauseita jolla
  - (a)  $A_n = A$ ,
  - (b) jokaisella  $i \leq n$ ,  $A_i$  on joko  $S$ :n alkio, aksiooma tai on saatu  $T3$ :lla jonon aikaisemmista jäsenistä.

6. Näytä, että jos propositiolauseessa  $A$  esiintyvien merkkien lukumäärä on parillinen, niin lauseessa  $A$  esiintyy merkki  $\neg$ .