Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 5, MATLAB-tehtävät 18-19

Kehittämiskaavojen käyttö isojen matriisien determinantin määrittämiseen on laskennallisesti raskasta. Tälla tavoin determinantin laskenta vaatii yleensä yli $n!$ liukulukuoperaatiota, missä n on matriisin rivien lukumäärä. Esimerkiksi 29×29-matriisin determinantin laskeminen tietojenkäsittelytieteen laitoksen Ukko-klusterissa[1] kestäisi yli kolme kertaa universumin iän[2]. Onneksi MATLAB ei laske determinanttia kehityskaavojen avulla vaan suoriutuu tehtävästä alle sekunnissa. Se käyttää determinantin ratkaisumenetelmässään Gaussin-elinointimenetelmän tapaista algoritmia. Gaussin-eliminointimenetelmä on laskennallisesti helppo. Alla olevissa tehtäväkohdissa tarkastellaan sitä miten MATLABIn `det` funktio on toteutettu.

Vastauksessasi vastaa tehtävän **korostettuihin** kohtiin.

18.

1. Avaa MATLAB (ks. Lineaarialgebra I, harjoitus 4, tehtävä 30).
2. Generoi satunnainen 29×29 matriisi ja ratkaise sen determinantti komennolla:
   `det(randn(29))`
   Laskentaan käytetyn ajan pitäisi alittaa universumin iän.

Ruvetaan selvittämään algoritmia jolla MATLAB urakasta suoriutuu:

3. Sijoita muuttajaan `matriisi` alla oleva 6×6 matriisi komennolla:
```
matriisi =
[3 2 4 5 1 1;
1 4 3 5 2 3;
3 5 1 3 4 1;
1 4 3 4 2 1;
3 5 1 2 4 1;
1 4 2 1 5 1]
```
4. Etsi matriisin LUP-hajotelma ja sijoita se muuttujiin `ylakolmio`, `alakolmio` ja `permutaatio` komennolla:

[1] Ukko-klusterin laskentatehon selvittämisestä kiitos tutkija Pekka Mikkolalle.
[2] 13,7 miljardia vuotta.

```
[alakolmio,ylakolmio,permutaatio] = lu(matriisi)
```

(LUP-hajotelma: `http://en.wikipedia.org/wiki/LU_decomposition`)

5. Laske: `permutaatio*matriisi - alakolmio*ylakolmio`
6. **Mitä tiedämme nyt lauseen 5.22. perusteella matriisin `matriisi` determinantista?**
   Vihje: käytä edellistä laskua ja muodosta yhtälö jossa ratkaiset arvon matriisin `matriisi` determinantille.

19.

7. **Mitä tiedämme nyt esimerkin 5.3.9 perusteella? Esimerkiksi mikä on matriisin `alakolmio` determinantti?**
8. Pätee, että jos neliömatriisi A on saatu matriisista B siten, että A on kuin B mutta kaksi riviä ovat vaihtaneet paikka, niin $\det(A) = -\det(B)$. Mitä tiedämme nyt matriisin `permutaatio` determinantista? Vihje: mikä on esimerkin 5.3.9. mukaan ykkösmatriisin determinantti?
9. Matriisin `A` diagonaalia vastaavan vektorin saat MATLABissa komennolla: `diag(A)`. Sijoita muuttujaan `diagYlakolmio`, matriisin `ylakolmio` diagonaalia vastaava vektori.
10. Vektorin `B` alkioiden tulon saat MATLABissa komennolla `prod(B)`. Sijoita muuttujaan `prodDiagYlakolmio`, vektorin `diagYlakolmio` alkioiden tulo.
11. **Laske: `det(matriisi)`. Miksi se on eri kuin `prodDiagYlakolmio`?**
    Vihje: kohta 8.

Kun viimeiseenkin kysymykseen on saatu vastaus, olemme selvittäneet idean jolla funktio `det` on toteutettu MATLABissa. Lisää aiheesta:
`http://www.mathworks.se/help/techdoc/ref/det.html`