Linjär algebra och matrisräkning II
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 6

Uppgifterna returneras ons 14.12.2011 kl 13.00 i samband med kursprovet.

Centralt för dessa uppgifter är

- Egenvärden, egenvektorer och egenrum
- Diagonalisering

Uppgift I

1. Bestäm egenvärdena för matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Hur kan du se vilka egenvärdena är genom att bara betrakta matrisen och inte göra några uträkningar? Beskriv med egna ord varför dina iakttagelser gäller.

3. Antag, att 2×2-matrisen A har egenvärdena 2 och 5. Antag dessutom att är $\bar{v}_2 = [1\ 0]^T$ och $\bar{v}_5 = [1\ 1]^T$ är egenvektorer som hör till dessa egenvärden. Bestäm matrisen A.

Uppgift II

Antag, att matrisen$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ har egenvärdet $\lambda \in \mathbb{R}$. Mängden

$$V_\lambda = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{x} = \lambda\bar{x}\}$$

kallas egenrummet som svarar mot egenvärdet λ till matrisen A. Egenrummet V_λ innehåller alla egenvektorer som hör till egenvärdet λ och dessutom nollvektorn.

4. Visa, att V_λ är ett delrum till rummet $\mathbb{R}^n$.

5. I övning 5 i uppgift III undersökte vi matrisen C. Bestäm egenrummet som svarar mot egenvärdet 4 till matrisen C.

6. Fortsättning till föregående uppgift. Bestäm egenrummet som svarar mot egenvärdet 7 till matrisen C.

7. Bestäm dimensionen av egenrummet i föregående uppgift?

Uppgift III

8. Visa, att matrisen
$$M = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
är diagonaliserbar.

9. Eftersomt matrisen M i föregående uppgift var diagonaliserbar, finns det en matris P och en diagonalmatris D, för vilka gäller $P^{-1}MP = D$. Bestäm matriserna P och D.

10. Är matrisen B i övning 5 i uppgift III diagonaliserbar?

11. Är matrisen C i övning 5 i uppgift III diagonaliserbar?

12. Bestäm potensen M^{10} av matrisen M i uppgift 8.

Uppgift IV

Vi undersöker det linjära rummet

$$\mathcal{P}_2 = \{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

som består av polynom av högst andra graden med reella koefficienter. I detta linjära rum definieras addition och multiplikation med skalär på följande sätt: om $aX^2 + bX + c \in \mathcal{P}_2$, $a'X^2 + b'X + c' \in \mathcal{P}_2$ och $k \in \mathbb{R}$, så

$$(aX^2 + bX + c) + (a'X^2 + b'X + c') = (a + a')X^2 + (b + b')X + c + c'$$

och
$$k(aX^2 + bX + c) = kaX^2 + kbX + kc.$$

Vi undersöker den linjära avbildningen

$$L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(aX^2 + bX + c) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix}.$$

13. Vilka av följande polynom hör till kärnan av avbildningen L:

$$X + 1, \quad -X^2 + X, \quad X^2 + X - 1?$$

14. Vilka av följande vektorer är element i bilden $\mathrm{Im}(L)$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

15. Bestäm kärnan $\mathrm{Ker}(L)$ och bilden $\mathrm{Im}(L)$.

Uppgift IV

Låt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Antag att $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar.

16. Visa att varje egenvärde till matrisen A också är ett egenvärde till matrisen $P^{-1}AP$.

    Om du vill kan du utnyttja tipset i slutet av uppgiftspappret.

17. Visa att varje egenvärde till matrisen $P^{-1}AP$ också är ett egenvärde till matrisen A.

18. Vad visade du i de två föregående uppgifterna? Formulera resultaten som en sats.

Uppgift VI

Ge feedback på kursen! Feedbacken motsvarar tre lösta uppgifter. Feedbacken är viktig för oss då vi utvecklar undervisningen. Efter kursprovet får du en link från weboodi via epost till feebacksblanketten.

Tips till uppgiften 16: Antag att λ är ett egenvärde till matrisen A och $\bar{v}$ motsvarande egenvektor. Visa sedan att λ är ett egenvärde till matrisen $P^{-1}AP$. Vektorn $P^{-1}\bar{v}$ har en speciell betydelse. Vilken?