Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 6

Tehtävät palautetaan ke 14.12.2011 klo 13.00 kurssikokeen yhteydessä.

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Ominaisarvot, -vektorit ja -avaruudet
- Diagonalisointi

Tehtävä I

1. Määritä matriisin
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
ominaisarvot.

2. Miten näet ominaisarvot suoraan matriisista? Selitä omin sanoin, miksi havaintosi pätee.

3. Oletetaan, että 2×2-matriisilla A on ominaisarvot 2 ja 5. Oletetaan lisäksi, että eräät näihin ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat $\bar{v}_2 = [1\ 0]^T$ ja $\bar{v}_5 = [1\ 1]^T$. Määritä matriisi A.

Tehtävä II

Oletetaan, että matriisilla $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$. Joukkoa
$$V_\lambda = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\bar{x} = \lambda\bar{x}\}$$
kutsutaan matriisin A ominaisarvoa λ vastaavaksi ominaisavaruudeksi. Ominaisavaruus V_λ sisältää kaikki ominaisarvoa λ vastaavat ominaisvektorit sekä nollavektorin.

4. Osoita, että V_λ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

5. Harjoituksen 5 tehtävässä III tutkittiin matriisia
$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$
Määritä matriisin C ominaisarvoa 4 vastaava ominaisavaruus. (Käytä hyväksi ratkaisuasi harjoituksen 5 tehtävään.)

6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä matriisin C ominaisarvoa 7 vastaava ominaisavaruus.

7. Mikä on edellisen tehtävän ominaisavaruuden dimensio?

Tehtävä III

8. Osoita, että matriisi
$$M = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$
on diagonalisoituva.

9. Koska edellisen tehtävän matriisi M on diagonalisoituva, on olemassa kääntyvä matriisi P ja lävistäjämatriisi D, joille pätee $P^{-1}MP = D$. Määritä matriisit P ja D.

10. Onko harjoituksen 5 tehtävän III matriisi $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ diagonalisoituva?

11. Onko harjoituksen 5 tehtävän III matriisi C diagonalisoituva?

12. Palataan vielä tehtävän 8 matriisiin M. Laske potenssi M^{10}.

Tehtävä IV

Tutkitaan reaalikertoimisten polynomien muodostamaa vektoriavaruutta
$$\mathcal{P}_2 = \{aX^2 + bX + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$
Tässä vektoriavaruudessa summa ja skalaarikertolasku määritellään seuraavasti: jos $aX^2 + bX + c \in \mathcal{P}_2$, $a'X^2 + b'X + c' \in \mathcal{P}_2$ ja $k \in \mathbb{R}$, niin
$$(aX^2 + bX + c) + (a'X^2 + b'X + c') = (a + a')X^2 + (b + b')X + c + c'$$
ja
$$k(aX^2 + bX + c) = kaX^2 + kbX + kc.$$

Tutkitaan kuvausta
$$L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2, \quad L(aX^2 + bX + c) = \begin{bmatrix} a - b \\ b + c \end{bmatrix},$$
joka on lineaarikuvaus.

13. Mitkä seuraavista polynomeista ovat kuvauksen L ytimessä:
$$X + 1, \quad -X^2 + X, \quad X^2 + X - 1?$$

14. Mitkä seuraavista vektoreista ovat kuvan $\mathrm{Im}(L)$ alkioita:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}?$$

15. Määritä ydin $\mathrm{Ker}(L)$ ja kuva $\mathrm{Im}(L)$.

Tehtävä V

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Oletetaan, että $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on kääntyvä matriisi.

16. Osoita, että jokainen matriisin A ominaisarvo on myös matriisin $P^{-1}AP$ ominaisarvo.

    Voit halutessasi katsoa vihjettä tehtäväpaperin lopusta.

17. Osoita, että jokainen matriisin $P^{-1}AP$ ominaisarvo on myös matriisin A ominaisarvo.

18. Mitä osoitit kahdessa edellisessä tehtävässä? Tiivistä tulos yhteen lauseeseen.

Tehtävä VI

Anna kurssipalautetta! Antamalla palautetta kartutat tekemiesi tehtävien määrää kolmen tehtävän verran. Palautteen antaminen on meille tärkeää, jotta osaamme kehittää opetustamme eteenpäin. Saat kokeen jälkeen weboodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautteen.

Vihje tehtävään 16: Oleta, että λ on matriisin A ominaisarvo ja $\bar{v}$ sitä vastaava ominaisvektori. Osoita sitten, että λ on myös matriisin $P^{-1}AP$ ominaisarvo. Vektorista $P^{-1}\bar{v}$ on apua.