Linjär algebra och matrisräkning II
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 5
Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 5.12.2011 kl. 17.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 9.12.2011 kl. 17.00.

Centralt för veckans uppgifter är

- Injektiva och surjektiva linjära avbildningar
- Isomorfier
- Determinanten
- Beräkning av egenvärden och egenvektorer

Uppgift I

en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$.
Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi vet att en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ är inverterbar om och endast om $\det(A) \neq 0$. Använd detta kriterium till att avgöra huruvida

1. matrisen A,
2. matrisen B,
3. matrisen C,

är inverterbar.

4. Är matrisen $3CB^T$ inverterbar?

Uppgift II

Vi undersöker den linjära avbildningen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$. I övning 4, uppgift 2, visade vi att f är en injektion.

5. Visa, att f inte är en surjektion.
6. Varför strider inte detta mot sats 4.2.15?

Uppgift III

Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Vi vet att λ är ett egenvärde till matrisen A om och endast om

$$(*) \qquad \det(A - \lambda I) = 0.$$

När vi evaluerar determinanten $\det(A - \lambda I)$ får vi ett polynom av graden n i variabeln λ. Detta polynom kallas *sekularpolynomet* eller det *karakteristiska polynomet* till matrisen A. Ekvationen $(*)$ kallas den *karakteristiska ekvationen*. Egenvärdena är alltså nollställen till sekularpolynomet, dvs. rötter till den karakteristiska ekvationen.

Låt $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

7. Bestäm egenvärdena och motsvarande egenvektorer till matrisen A.

8. Bestäm egenvärdena och motsvarande egenvektorer till matrisen B.

9. Bestäm egenvärdena och motsvarande egenvektorer till matrisen C.

Uppgift IV

10. Låt $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Visa, att A är inverterbar om och endast om talet 0 inte är ett egenvärde till matrisen A.

11. Antag att matrisen A är inverterbar och har ett egenvärde λ. Visa att λ^{-1} är ett egenvärde till matrisen A^{-1}.

Uppgift V

12. Bestäm någon isomorfi mellan rummet $\mathbb{R}^2$ och planet

$$T = \{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \,\}.$$

(Tips: Bestäm först två vektorer som spänner upp planet.)

Uppgift VI

Vi undersöker den linjära avbildningen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\bar{x}) = [x_1 + 2x_2 \quad 4x_1 + 3x_2]^T$ och vektorerna $\bar{a}_1 = [1\ 2]^T$, $\bar{a}_2 = [1\ \ -1]^T$ och $\bar{v} = [3\ 0]^T$.

13. Visa, att $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ är en bas för rummet $\mathbb{R}^2$.

14. Bestäm koordinatvektorerna $[\bar{a}_1]_S$, $[\bar{a}_2]_S$ och $[\bar{v}]_S$.

15. Bestäm vektorerna $L(\bar{a}_1)$, $L(\bar{a}_2)$ och $L(\bar{v})$ samt koordinatvektorerna $[L(\bar{a}_1)]_S$, $[L(\bar{a}_2)]_S$ och $[L(\bar{v})]_S$?

16. Bestäm en sådan matris $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ att

$$B[\bar{a}_1]_S = [L(\bar{a}_1)]_S \quad \text{och} \quad B[\bar{a}_2]_S = [L(\bar{a}_2)]_S.$$

17. Beräkna $B[\bar{v}]_S$. Vad märker du?

Hittills har vi använt oss av matriser till linjära avbildningar med avseende på den naturliga basen. Ibland lönar det sig att använda någon annan bas. Det kan bevisas att matrisen B i föregående uppgift uppfyller

$$[L(\bar{v})]_S = B[\bar{v}]_S$$

för alla vektorer $\bar{v}$ i definitionsmängden. Genom att multiplicera med matrisen B får vi värdena på avbildningen, när alla vektorer uttrycks med hjälp av koordinatvektorer med avseende på basen S.

Märk, att kolumnerna i matrisen B är bildvektorerna till basen S med avseende på basen S:

$$B = [[L(\bar{a}_1)]_S \quad [L(\bar{a}_2)]_S].$$

Detta kan generaliseras att gälla alla linjära avbildningar.

Matrisen B kallas matrisen till den linjära avbildningen L med avseende på basen S. I kompendiet betecknas denna matris $M(L; S \leftarrow S)$.

Uppgift VII

18. Besvara den första MATLAB-frågan som finns på ett skilt uppgiftsblad.

19. Besvara den andra MATLAB-frågan som finns på ett skilt uppgiftsblad.

Det lönar sig att öppna uppgiftsbladet på den dator du utför uträkningarna på då du kan klippa och limma kommandona direkt ur uppgiften.