Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 5.12.2011 klo 17.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 9.12.2011 klo 17.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Injektiiviset ja surjektiiviset lineaarikuvaukset
- Isomorfismi
- Determinantti
- Ominaisarvojen ja -vektoreiden määrittäminen

Tehtävä I

Voidaan osoittaa, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on kääntyvä, jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Päättele determinantin avulla, onko matriisi A kääntyvä.
2. Päättele determinantin avulla, onko matriisi B kääntyvä.
3. Päättele determinantin avulla, onko matriisi C kääntyvä.
4. Onko matriisi $3CB^T$ kääntyvä?

Tehtävä II

Tutkitaan lineaarikuvausta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$. Harjoituksen 4 tehtävässä 2 osoitettiin, että f on injektio.

5. Osoita, että f ei ole surjektio.
6. Miksei tämä ole ristiriidassa lauseen 4.2.15 kanssa?

Tehtävä III

Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Voidaan osoittaa, että λ on matriisin A ominaisarvo jos ja vain jos

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Kun determinantti $\det(A - \lambda I)$ lasketaan, saadaan n-asteinen polynomi, jossa muuttujana on λ. Tätä polynomia kutsutaan matriisin A karakteristiseksi polynomiksi. Ominaisarvot ovat siis karakteristisen polynomin nollakohdat.

Olkoot $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ja $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

7. Määritä matriisin A ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

8. Määritä matriisin B ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

9. Määritä matriisin C ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

Tehtävä IV

10. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Osoita, että A on kääntyvä, jos ja vain jos luku 0 ei ole matriisin A ominaisarvo.

11. Oletetaan, että matriisi A on kääntyvä. Osoita, että λ^{-1} on matriisin A^{-1} ominaisarvo.

Tehtävä V

12. Määritä jokin isomorfismi avaruuden $\mathbb{R}^2$ ja tason

$$T = \{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \,\}$$

välille. (Vihje: Etsi ensin tasolle virittäjät.)

Tehtävä VI

Tutkitaan lineaarikuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(\bar{x}) = [x_1 + 2x_2 \quad 4x_1 + 3x_2]^T$ ja vektoreita $\bar{a}_1 = [1\ 2]^T$, $\bar{a}_2 = [1\ -1]^T$ ja $\bar{v} = [3\ 0]^T$.

13. Osoita, että $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

14. Määritä koordinaattivektorit $[\bar{a}_1]_S$, $[\bar{a}_2]_S$ ja $[\bar{v}]_S$.

15. Määritä vektorit $L(\bar{a}_1)$, $L(\bar{a}_2)$ ja $L(\bar{v})$. Mitkä ovat koordinaattivektorit $[L(\bar{a}_1)]_S$, $[L(\bar{a}_2)]_S$ ja $[L(\bar{v})]_S$?

16. Etsi sellainen matriisi $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, että

$$B[\bar{a}_1]_S = [L(\bar{a}_1)]_S \quad \text{ja} \quad B[\bar{a}_2]_S = [L(\bar{a}_2)]_S.$$

17. Laske $B[\bar{v}]_S$. Mitä huomaat?

Tähän asti olemme kirjoittaneet lineaarikuvauksen matriisin aina luonnollisen kannan suhteen. Toisinaan on kuitenkin hyödyllistä käyttää jotain toista kantaa. Voidaan osoittaa, että edellisen tehtävän matriisille B pätee

$$[L(\bar{v})]_S = B[\bar{v}]_S$$

kaikilla lähtöjoukon vektoreilla $\bar{v}$. Matriisilla B kertominen antaa siis kuvauksen arvot, kun kaikki vektorit ilmaistaan kannan S suhteen kirjoitettuina koordinaattivektoreina.

Huomaa, että matriisin B sarakkeina ovat kannan S vektoreiden kuvavektorit kannan S suhteen kirjoitettuna:

$$B = [[L(\bar{a}_1)]_S \quad [L(\bar{a}_2)]_S].$$

Tämä voidaan yleistää mille tahansa lineaarikuvaukselle.

Matriisia B kutsutaan lineaarikuvauksen L matriisiksi kannan S suhteen. Luentomateriaalissa tätä matriisia merkitään $M(L; S \leftarrow S)$.

Tehtävä VII

19–20. Tee kurssisivulla annetut erilliset MATLAB-tehtävät esimerkiksi tietokoneluokassa C128. Tehtäviä tehdessä kannattaa kopioida komentoja suoraan tehtävänannosta.