Linjär algebra och matrisräkning II
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 4

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 28.11.2011 kl. 17.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 2.12.2011 kl. 17.00.

I dessa övningar behandlas

- Bilden och kärnan av en linjär avbildning
- Isomorfi
- Egenvärde
- Determinant

Uppgift I

Vi undersöker den linjära avbildningen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,
$f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$.

1. Bestäm kärnan $\mathrm{Ker}(L)$ av avbildningen.

2. Är avbildningen en injektion?

Uppgift II

Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Vi undersöker avbildningen

$$L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L_A(\bar{x}) = A\bar{x}.$$

3. Bestäm avnildningen kärna $\mathrm{Ker}(L_A)$.

4. Vilken dimensionen har kärnan?

5. Bestäm en bas till bilden $\mathrm{Im}(L_A)$.

6. Vilken dimension har bilden $\mathrm{Im}(L_A)$?

7. Är avbildningen L_A en injektion, surjektion eller bijektion?

8. Är matrisen A inverterbar? Dra slutsatsen av resultaten i föregående uppgifter.

Uppgift III

Låt $L\colon V \to V'$ vara en linjär avbildning.

9. Visa att om mängden $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset V$ inte är linjärt oberoende, så är inte mängden
$$\{L(\bar{v}_1), L(\bar{v}_2), L(\bar{v}_3)\}$$
det heller.

Uppgift IV

Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. En vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ skild från nollvektorn sådan att

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}$$

för något tal λ kallas en *egenvektor* till A med *egenvärdet* λ.

10. Visa, att $[1\ 1]^T$ är en egenvektor till matrisen
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
och bestäm det motsvarande egenvärdet.

11. Visa att 5 är ett egenvärde till matrisen
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
och bestäm alla egenvektorer som svarar mot detta egenvärde.

Uppgift V

Bestäm matrisen för den linjära avbildningen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ med avseende på standardbasen, då

12. L roterar varje vektor medsols 30° runt origo.

13. L är den ortogonala projektionen på delrummet $\text{span}\{\bar{w}\}$, där $\bar{w} = [3\ 1]^T$.

Vi undersöker ännu matriserna som definierats i föregående uppgift.

14. Bestäm egenvektorerna till matrisen i uppgift 12 geometriskt, utan beräkningar.

15. Bestäm egenvektorerna till matrisen i uppgift 13 geometriskt, utan beräkningar.

Uppgift VI

Beräkna $\det(A)$, då

16.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

17.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

18.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Information om determinanten och ett behändigt beräkningssätt hittar du bakom länken på kurssidan.

Uppgift VII

19. Låt $L\colon V \to V'$ vara en linjär avbildning. Antag, att W är ett delrum till rummet V. Visa, att bildmängden $L[W] = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$ är ett delrum till rummet V'.

20. Beskriv med egna ord och utan matematiska symboler resultatet du fick i föregående uppgift.