Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 28.11.2011 klo 17.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 2.12.2011 klo 17.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Lineaarikuvauksen ydin ja kuva
- Isomorfismi
- Ominaisarvo
- Determinantti

Tehtävä I

Tutkitaan lineaarikuvausta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$.

1. Määritä kuvauksen ydin $\mathrm{Ker}(L)$.

2. Onko kuvaus injektio?

Tehtävä II

Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$. Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad L_A(\bar{x}) = A\bar{x}.$$

3. Määritä kuvauksen ydin $\mathrm{Ker}(L_A)$.

4. Mikä on ytimen dimensio?

5. Keksi kuvalle $\mathrm{Im}(L_A)$ jotkin virittäjät.

6. Mikä on kuvan $\mathrm{Im}(L_A)$ dimensio?

7. Onko lineaarikuvaus L_A injektio, surjektio tai bijektio?

8. Päättele edellisten kohtien avulla, onko matriisi A kääntyvä.

Tehtävä III

Olkoon $L\colon V \to V'$ lineaarikuvaus.

9. Osoita, että jos joukko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset V$ ei ole vapaa, myöskään joukko

$$\{L(\bar{v}_1), L(\bar{v}_2), L(\bar{v}_3)\}.$$

ei ole vapaa

Tehtävä IV

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Luku $\lambda \in \mathbb{R}$ on matriisin ominaisarvo, jos on olemassa nollasta poikkeava vektori $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, jolle pätee

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}.$$

Vektoria $\bar{x}$, joka toteuttaa yllä mainitun ehdon kutsutaan ominaisarvoon λ liittyväksi ominaisvektoriksi.

10. Osoita, että $[1\ 1]^T$ on matriisiin

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisvektori ja määritä sitä vastaava ominaisarvo.

11. Osoita, että 5 on matriisiin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

ominaisarvo ja määritä kaikki sitä vastaavat ominaisvektorit.

Tehtävä V

Johda lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matriisi, jos

12. L kiertää vektoria origon ympäri myötäpäivään 30°.

13. L antaa vektorin kohtisuoran projektion aliavaruudelle span$\{\bar{w}\}$, missä $\bar{w} = [3\ 1]^T$.

Tutkitaan vielä edellisissä tehtävissä määriteltyjä matriiseja.

14. Määritä tehtävän 12 matriisin ominaisvektorit geometrisesti ilman laskuja.

15. Määritä tehtävän 13 matriisin ominaisvektorit geometrisesti ilman laskuja.

Tehtävä VI

Laske $\det(A)$, jos

16.
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

17.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

18.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Tietoa determinantista ja kätevä laskumenetelmä löytyy kurssisivulla olevasta linkistä.

Tehtävä VII

19. Olkoon $L\colon V \to V'$ lineaarikuvaus. Oletetaan, että W on avaruuden V aliavaruus. Osoita, että kuva $L[W] = \{L(\bar{w}) \mid \bar{w} \in W\}$ on avaruuden V' aliavaruus.

20. Muotoile omin sanoin tulos, jonka osoitit edellisessä tehtävässä. Tee se ilman matemaattisia symboleita.