Linjär algebra och matrisräkning II
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 3

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 21.11.2011 kl. 16.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 25.11.2011 kl. 17.00.

I dessa övningar behandlas

- Definitionen av en linjär avbildning
- Avbildningsmatriser
- Kärnan av en linjär avbildning

Uppgift I

Undersök, om avbildningen f är linjär, då

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$ för alla $x \in \mathbb{R}$.
3. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$ för alla $\bar{x} = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$.
4. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x}) = [x_1 - 4 \quad 6x_2]^T$ för alla $\bar{x} = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$.
5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en avbildning för vilken
$$f\Big([1\ 0]^T\Big) = [-2\ 3]^T, \quad f\Big([0\ 1]^T\Big) = [3\ 1]^T \quad \text{och} \quad f\Big([-3\ -2]^T\Big) = [0\ -12]^T.$$

Uppgift II

Låt $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning.

6. Antag, att $L\Big([1\ 0]^T\Big) = [1\ 1]^T$ ja $L\Big([0\ 1]^T\Big) = [-1\ 1]^T$. Bestäm bildvektorerna $L\Big([1\ 4]^T\Big)$ och $L\Big([-2\ 3]^T\Big)$.
7. Antag, att $L\Big([1\ 0]^T\Big) = [-2\ 0]^T$ och $L\Big([0\ 1]^T\Big) = [0\ 2]^T$. Bestäm bildvektorn $L(\bar{x})$ av vektorn $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$.

Uppgift III

8. Visa, att avbildningen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är linjär om och endast om det existerar ett sådant reellt tal a, att $f(x) = ax$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Beviset skall vara skrivet noggrant med bra matematisk stil.

Uppgift IV

Låt

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen A definierar en linjär avbildning $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ för vilken $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$.

9. Bestäm vbilderna av vektorerna i den naturliga basen $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_4, \bar{e}_4\}$ under avbildningen L_A. Hur kan du se svaret direkt genom att betrakta matrisen A?

Uppgift V

Låt $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Man kan bevisa att det existerar en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ för vilken $L(\bar{x}) = A\bar{x}$ för alla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Matrisen A kallas avbildningsmatrisen till L.

Om A är avbildningsmatrisen till avbildningen L är avbildsvektorerna av den naturliga basen matrisens kolumner. Detta kan med fördel användas då man bestämmer avbildningsmatrisen.

10. Bestäm avbildningsmatrisen till avbildningen

$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$$

.

Låt $\bar{v} = [2 \ -1]^T$. Bestäm avbildningsmatrisen till avbildningen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i följande fall samt rita en bild av vektorerna $\bar{v}$ och $L(\bar{v})$.

11. Avbildningen L tänjer längden trefalt av den vektor den avbildar och ändrar dess riktning till motsatt håll.

12. Avbildningen L ger som resultat den ortogonala projektionen av vektorn på delrummet span$\{\bar{e}_2\}$, där $\bar{e}_2 = [0 \ 1]^T$.

13. Avbildningen L speglar vektorn i linjen $y = x$.

Uppgift VI

Kärnan till den linjära avbildningen $L\colon V \to W$ är mängden

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$

Kärnan är alltså urbilden $f^{\leftarrow}\{\bar{0}\}$ av mängden $\{\bar{0}\}$.

14. Bestäm kärnan till den linjära avbildningen L_A i uppgift IV.

15. Nedan ges ett försök att bevisa att kärnan av en linjär avbildning är ett delrum. Beviset saknar detaljer. Komplettera beviset med detaljer i bra matematisk stil.

    Påstående: Antag att $L\colon V \to W$ är en linjär avbildning. Då är mängden $\mathrm{Ker}(L)$ ett delrum till det linjära rummet V.

    Bevis:

$$\begin{aligned}
&1) \quad L(\bar{a}+\bar{b}) = L(\bar{a}) + L(\bar{b}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \\
&2) \quad L(k\bar{a}) = kL(\bar{a}) = k \cdot \bar{0} = \bar{0} \\
&3) \quad L(\bar{0}) = \bar{0}
\end{aligned}$$

Uppgift VII

Beteckna

$$P_2 = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ är en polynomfunktion och } \deg f \leq 2\}.$$

I mängden P_2 kan man definiera addition och multiplikation med skalärer. Om $f \in P_2$, $g \in P_2$ och $a \in \mathbb{R}$, så definieras $f+g$ och af sålunda:

$$\begin{aligned}
&f+g\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)+g(x) \quad \text{och} \\
&af\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto af(x).
\end{aligned}$$

Med dessa räkneoperationer är P_2 ett linjärt rum (se s. 34). Som exempel undersöker vi funktionerna

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2+1 \quad \text{och} \quad g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = -4x. \qquad (*)$$

Då är funktionerna $f+g$ och $3f$

$$f+g\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2-4x+1 \quad \text{och} \quad 3f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 3x^2+3.$$

I rummet P_2 kan man definiera inreprodukten genom

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

16. Beräkna normen $\|g\|$ av funktionen g som definierats i $(*)$.

17. Låt f och g vara funktionerna som definierats i $(*)$. Beräkna projektionen $\mathrm{proj}_g f$.

18. Ange två element skilda från noll i rummet P_2 som är vinkelräta sinsemellan.