Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 21.11.2011 klo 16.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 25.11.2011 klo 17.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Lineaarikuvauksen määritelmä
- Lineaarikuvauksen matriisi
- Lineaarikuvauksen ydin

Tehtävä I

Tutki, onko kuvaus f lineaarinen, jos

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.
3. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$ kaikilla $\bar{x} = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$.
4. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\bar{x}) = [x_1 - 4 \quad 6x_2]^T$ kaikilla $\bar{x} = [x_1\ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$.
5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on kuvaus, jolle pätee
$$f\left([1\ 0]^T\right) = [-2\ 3]^T, \quad f\big([0\ 1]^T\big) = [3\ 1]^T \quad \text{ja} \quad f\big([-3\ -2]^T\big) = [0\ -12]^T.$$

Tehtävä II

Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus.

6. Oletetaan, että $L\big([1\ \ 0]^T\big) = [1\ \ 1]^T$ ja $L\big([0\ \ 1]^T\big) = [-1\ \ 1]^T$. Määritä kuvavektorit $L\big([1\ 4]^T\big)$ ja $L\big([-2\ 3]^T\big)$.
7. Oletetaan, että $L\big([1\ \ 0]^T\big) = [-2\ \ 0]^T$ ja $L\big([0\ \ 1]^T\big) = [0\ \ 2]^T$. Määritä vektorin $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ kuvavektori $L(\bar{x})$.

Tehtävä III

8. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, jos ja vain jos on olemassa sellainen reaaliluku a, että $f(x) = ax$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Kirjoita todistus huolellisesti ja hyvällä matemaattisella tyylillä.

Tehtävä IV

Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Matriisista saadaan lineaarikuvaus $L_A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, jolle pätee $L_A(\bar{x}) = A\bar{x}$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^4$.

9. Määritä luonnollisen kannan $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ vektoreiden arvot kuvauksessa L_A. Miten näet ne suoraan matriisista A?

Tehtävä V

Olkoon $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineaarikuvaus. Voidaan osoittaa, että tällöin on olemassa matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jolle pätee $L(\bar{x}) = A\bar{x}$ kaikilla $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Matriisia A kutsutaan lineaarikuvauksen L matriisiksi.

Jos A on kuvauksen L matriisi, luonnollisen kannan vektoreiden kuvavektorit ovat matriisin sarakkeina. Tätä tietoa voi käyttää hyväksi, kun määrittää kuvauksen matriisia.

10. Määritä lineaarikuvauksen
$$L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(\bar{x}) = [7x_1 \quad x_1 + x_2 \quad 3x_2 - x_1]^T$$
matriisi.

Olkoon $\bar{v} = [2 \ \ -1]^T$. Määritä lineaarikuvauksen $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matriisi seuraavissa tapauksissa ja piirrä kuva vektoreista $\bar{v}$ ja $L(\bar{v})$.

11. Kuvaus L venyttää vektorin pituudeltaan kolminkertaiseksi ja kääntää sen suunnan vastakkaiseksi.

12. Kuvaus L antaa tulokseksi vektorin kohtisuoran projektion aliavaruudelle span$\{\bar{e}_2\}$, missä $\bar{e}_2 = [0 \ 1]^T$.

13. Kuvaus L peilaa vektorin suoran $y = x$ suhteen.

Tehtävä VI

Lineaarikuvauksen $L\colon V \to W$ ydin on joukko
$$\mathrm{Ker}(L) = \{\bar{v} \in V \mid L(\bar{v}) = \bar{0}\}.$$
Kyseessä on siis joukon $\{\bar{0}\}$ alkukuva $L^{\leftarrow}\{\bar{0}\}$.

14. Määritä tehtävän IV lineaarikuvauksen L_A ydin.

15. Alla on yritetty osoittaa, että lineaarikuvauksen ydin on aliavaruus. Todistuksesta puuttuu kuitenkin yksityiskohtia. Korjaa todistus hyvän matemaattisen tyylin mukaiseksi.

    Väite: Oletetaan, että $L\colon V \to W$ on lineaarikuvaus. Tällöin joukko $\mathrm{Ker}(L)$ on vektoriavaruuden V aliavaruus.

    Todistus:

$$\begin{aligned}
&1) \quad L(\bar{a}+\bar{b}) = L(\bar{a}) + L(\bar{b}) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \\
&2) \quad L(k\bar{a}) = kL(\bar{a}) = k \cdot \bar{0} = \bar{0} \\
&3) \quad L(\bar{0}) = \bar{0}
\end{aligned}$$

Tehtävä VII

Merkitään

$$P_2 = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on polynomifunktio ja } \deg f \le 2\}.$$

Joukossa P_2 voidaan määritellä yhteenlasku ja skalaarikertolasku. Jos $f \in P_2$, $g \in P_2$ ja $a \in \mathbb{R}$, niin kuvaukset $f+g$ ja af määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned}
&f+g\colon \ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)+g(x) \quad \text{ja} \\
&af\colon \ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto af(x).
\end{aligned}$$

Näillä laskutoimituksilla varustettuna P_2 on vektoriavaruus (ks. s. 34). Tarkastellaan esimerkiksi funktioita

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2+1 \quad \text{ja} \quad g\colon [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = -4x.$$

Nyt funktiot $f+g$ ja $3f$ näyttävät seuraavilta:

$$f+g\colon \ [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2-4x+1 \quad \text{ja} \quad 3f\colon \ [0,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 3x^2+3.$$

Avaruudessa P_2 voidaan määritellä sisätulo ehdolla

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

16. Laske edellä määritellyn funktion g normi $\|g\|$.

17. Olkoot f ja g edellä määritellyt funktiot. Laske projektio $\mathrm{proj}_g f$.

18. Keksi kaksi nollasta poikkeavaa avaruuden P_2 alkiota, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.