Linjär algebra och matrisräkning II
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 2
Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 14.11.2011 kl. 16.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 18.11.2011 kl. 17.00.

Centralt för veckans uppgifter är

- Projektion
- Hur man finner en ortonormerad bas
- Ortogonalt komplement
- Kryssprodukt

Uppgift I

1. Beräkna ortogonalprojektionen av vektorn $\bar{v} = [4\ 4]^T$ på delrummet som spänns upp av vektorn $\bar{e}_1 = [1\ 0]^T$ samt på delrummet som spänns upp av vektorn vektorn $\bar{a}_1 = [1\ \ -2]^T$.

2. Rita en bild av vektorn $\bar{v}$ och de båda projektionerna.

Låt V vara ett inreproduktrum, som har ett delrum W. Antag, att delrummet W har en ortogonal bas $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k\}$. Låt $\bar{v} \in V$. Vektorn

$$\text{proj}_W \bar{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle}{\langle \bar{w}_i, \bar{w}_i \rangle} \bar{w}_i$$

är ortogonalprojektionen till vektorn $\bar{v}$ på W.

Vi kommer senare att se, att i ett ändligtdimensionellt linjärt rum har varje delrum en ortogonal bas, vilket betyder att projektionen alltid går att definiera. Märk att vi måste använda en ortogonal bas. Annars är vektorn $\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v}$ inte nödvändigtvis vinkelrät mot delrummet W. Vi återkommer till detta senare.

Om delrummet W spänns upp av en vektor $\bar{w} \neq \bar{0}$, erhåller vi projektionen:

$$\text{proj}_W \bar{v} = \text{proj}_{\bar{w}} \bar{v} = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} \bar{w}.$$

3. Vi betecknar $\bar{w}_1 = [2\ 1\ 2]^T$ och $\bar{w}_2 = [2\ 0\ \ -2]^T \in \mathbb{R}^3$. Låt $W = \text{span}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$. Bestäm ortogonalprojektionen till vektorn $\bar{a} = [-1\ 3\ 0]^T$ på delrummet W.

4. Antag, att $\bar{v}, \bar{w} \in V$ och $\bar{w} \neq \bar{0}$. Bestäm normen, dvs. längden, av vektorn $\text{proj}_{\bar{w}}\bar{v}$.

5. Beräkna normen i föregående uppgift då $\bar{w}$ är en enhetsvektor. Du får en ny geometrisk tolkning av punktprodukten. Den är längden av projektionsvektorn.

Uppgift II

Låt $\bar{a}_1 = [1\ 0\ 1]^T$, $\bar{a}_2 = [0\ 1\ 2]^T$, $\bar{a}_3 = [1\ -1\ 2]^T \in \mathbb{R}^3$.

6. Bestäm en ortonormal bas för rummet $\mathbb{R}^3$ genom att tillämpa Gram-Schmidts ortonormaliseringsprocess på basen $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ för rummet $\mathbb{R}^3$.

7. Bestäm koordinaterna för vektorn $\bar{v} = [10\ 2\ 7]^T$ med avseende på den ortonormerade basen för rummet $\mathbb{R}^3$ som du konstruerade i föregående uppgift.

8. Beteckna $\bar{w}_1 = [2\ 1\ 2]^T$ och $\bar{w}_2 = [2\ 0\ -1]^T \in \mathbb{R}^3$. Låt $W = \text{span}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$. Bestäm ortogonalprojektionen till vektorn $\bar{a} = [2\ 3\ 4]^T$ på delrummet W.

Uppgift III

Beskriv geometriskt hur delrummet $W \subset \mathbb{R}^3$ och det ortogonala komplementet $W^\perp$ till delrummet W ser ut, om

9. $W = \text{span}\{[1\ 1\ 1]^T\}$,

10. $W = \text{span}\{[2\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 3]^T\}$,

11. $W = \{\bar{0}\}$.

Uppgift IV

Antag, att V är ett inreproduktrum och att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Vi undersöker delrummet $W = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ som dessa vektorer spänner upp.

12. Antag, att $\bar{v} \in V$ och $\langle \bar{v}, \bar{v}_i \rangle = 0$ för alla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Visa, att $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ för alla $w \in W$.

13. Formulera med egna ord resultatet i föregående uppgift. Gör det utan matematiska symboler.

Antag, att $\bar{v} \in V$. Vektorn $\text{proj}_W \bar{v}$ hör till delrummet W. Eftersom projektionen definieras med hjälp av en ortogonal bas är det enkelt att visa att vektorn $\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v}$ är vinkelrät mot alla basvektorer i rummet W. Av det som bevisades ovan följer att $\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v}$ är vinkelrätt mot *alla* vektorer i rummet W, dvs. $\bar{v} - \text{proj}_W \bar{v} \in W^{\perp}$.

14. Uttryck vektorn $\bar{a}$ i uppgift 3 som summan av två vektorer, den ena i W och den andra i $W^{\perp}$.

Uppgift V

Låt $\bar{v} = [3\ 2\ 0]^T$ och $\bar{w} = [1\ 4\ 0]^T \in \mathbb{R}^3$.

15. Bestäm kryssprodukten av vektorerna $\bar{v}$ och $\bar{w}$. (Se. kapitel 3.5.)
16. Ange någon vektor som är vinkelrätt mot planet som spänns upp av vektorerna $\bar{v}$ och $\bar{w}$. Motivera ditt svar.
17. Beräkna arean av parallellogrammen med sidorna vektorerna $\bar{v}$ och $\bar{w}$.
18. Rita en triangel, vars sidor är $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{w} + \bar{v}$. Bestäm triangelns area.
19. Rita en triangel, vars sidor är $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{w} - \bar{v}$. Bestäm triangelns area.

Betrakta följande punkter i rummet $\mathbb{R}^3$:

$$A = (2, -1, -2), \quad B = (1, -1, 1), \quad C = (-1, 3, -3) \quad \text{ja} \quad D = (-2, -1, 1).$$

20. Bestäm volymen av parallellepipeden, vars sidor är $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ och $\overline{AD}$.