Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 14.11.2011 klo 16.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 18.11.2011 klo 17.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Projektio
- Ortonormaalin kannan etsiminen
- Kohtisuora komplementti
- Ristitulo

Tehtävä I

1. Laske vektorin $\bar{v} = [4\ 4]^T$ kohtisuora projektio sekä vektorin $\bar{e}_1 = [1\ 0]^T$ että vektorin $\bar{a}_1 = [1\ \ -2]^T$ virittämälle aliavaruudelle.

2. Piirrä kuva, jossa näkyvät vektori $\bar{v}$ ja molemmat projektiot.

Olkoon V sisätuloavaruus, jolla on aliavaruus W. Oletetaan, että aliavaruudella W on ortogonaalinen kanta $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_k\}$. Olkoon $\bar{v} \in V$. Vektori

$$\mathrm{proj}_W \bar{v} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle \bar{v}, \bar{w}_i \rangle}{\langle \bar{w}_i, \bar{w}_i \rangle} \bar{w}_i$$

on vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W.

Myöhemmin näemme, että äärellisulotteisen vektoriavaruuden millä tahansa aliavaruudella on aina ortogonaalinen kanta, joten projektio voidaan aina määrittää. Huomaa, että ortogonaalisen kannan käyttäminen on välttämätöntä. Muuten vektori $\bar{v} - \mathrm{proj}_W \bar{v}$ ei ole välttämättä kohtisuorassa tasoa W vastaan. Myös tähän palataan myöhemmin.

Jos aliavaruuden W virittää yksi vektori $\bar{w} \neq \bar{0}$, saadaan jo ennestään tuttu projektio:

$$\mathrm{proj}_W \bar{v} = \mathrm{proj}_{\bar{w}} \bar{v} = \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle} \bar{w}.$$

3. Merkitään $\bar{w}_1 = [2\ 1\ 2]^T$ ja $\bar{w}_2 = [2\ 0\ \ -2]^T \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $W = \mathrm{span}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$. Määritä vektorin $\bar{a} = [-1\ 3\ 0]^T$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W.

4. Olkoon V sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Määritä vektorin $\text{proj}_{\bar{w}}\bar{v}$ normi eli pituus.

5. Laske edellisen tehtävän normi, kun $\bar{w}$ on yksikkövektori. Tässä tapauksessa sisätulon itseisarvo kertoo siis projektiovektorin pituuden.

Tehtävä II

Olkoot $\bar{a}_1 = [1\ 0\ 1]^T$, $\bar{a}_2 = [0\ 1\ 2]^T$, $\bar{a}_3 = [1\ -1\ 2]^T \in \mathbb{R}^3$.

6. Etsi avaruudelle $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta soveltamalla Gramin-Schmidtin menetelmää avaruuden $\mathbb{R}^3$ kantaan $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$.

7. Määritä vektorin $\bar{v} = [10\ 2\ 7]^T$ koordinaatit löytämässäsi avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaalissa kannassa.

8. Merkitään $\bar{w}_1 = [2\ 1\ 2]^T$ ja $\bar{w}_2 = [2\ 0\ -1]^T \in \mathbb{R}^3$. Olkoon $W = \text{span}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$. Määritä vektorin $\bar{a} = [2\ 3\ 4]^T$ kohtisuora projektio aliavaruudelle W.

Tehtävä III

Kuvaile geometrisesti, miltä näyttää aliavaruus $W \subset \mathbb{R}^3$ ja sen kohtisuora komplementti $W^\perp$, jos

9. $W = \text{span}\{[1\ 1\ 1]^T\}$,

10. $W = \text{span}\{[2\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 3]^T\}$,

11. $W = \{\bar{0}\}$.

Tehtävä IV

Oletetaan, että V on sisätuloavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k \in V$. Tutkitaan näiden vektoreiden virittämää aliavaruutta $W = \text{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$.

12. Oletetaan, että $\bar{v} \in V$ ja $\langle \bar{v}, \bar{v}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Osoita, että $\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$ kaikilla $\bar{w} \in W$.

13. Muotoile omin sanoin tulos, jonka osoitit edellisessä tehtävässä. Tee se ilman matemaattisia symboleita.

Oletetaan, että $\bar{v} \in V$. Vektori $\text{proj}_W\bar{v}$ on aliavaruudessa W. Koska projektion määritelmässä käytettiin ortogonaalista kantaa, on suoraviivaista näyttää, että vektori $\bar{v} - \text{proj}_W\bar{v}$ on kohtisuorassa jokaista avaruuden W kantavektoria vastaan. Edellä osoitetun nojalla $\bar{v} - \text{proj}_W\bar{v}$ on kohtisuorassa *kaikkia* avaruuden W vektoreita vastaan eli $\bar{v} - \text{proj}_W\bar{v} \in W^\perp$.

14. Kirjoita tehtävän 3 vektori $\bar{a}$ summana aliavaruuksien W ja $W^{\perp}$ vektoreista.

Tehtävä V

Olkoot $\bar{v} = [3\ 2\ 0]^T$ ja $\bar{w} = [1\ 4\ 0]^T \in \mathbb{R}^3$.

15. Määritä vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ristitulo. (Ks. luku 3.5.)
16. Anna jokin vektori, joka on kohtisuorassa vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ virittämää aliavaruutta vastaan. Perustele vastauksesi.
17. Laske vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ määräämän suunnikkaan pinta-ala.
18. Piirrä kolmio, jonka sivut ovat $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{w} + \bar{v}$. Mikä on sen pinta-ala?
19. Piirrä kolmio, jonka sivut ovat $\bar{v}$, $\bar{w}$ ja $\bar{w} - \bar{v}$. Mikä on sen pinta-ala?

Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ pisteitä

$$A = (2, -1, -2), \quad B = (1, -1, 1), \quad C = (-1, 3, -3) \quad \text{ja} \quad D = (-2, -1, 1).$$

20. Määritä sen suuntaissärmiön tilavuus, jonka sivuja ovat $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ja $\overline{AD}$.