Linjär algebra och matrisräkning II
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 1
Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 7.11.2011 kl. 16.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 11.11.2011 kl. 17.00.

Centralt för veckans uppgifter är

- Inre produkt, speciellt skalärprodukt
- Norm
- Vinkeln mellan vektorer samt vinkelräthet
- Ortogonal och ortonormerad bas

Uppgift I

Vi betecknar $\bar{v} = [-1\ 2\ \ -2]^T$ och $\bar{w} = [5\ \ -2\ 1]^T \in \mathbb{R}^3$.

1. Bestäm skalärprodukten $\bar{v} \cdot \bar{w}$.

2. Beräkna normerna $\|\bar{v}\|$ och $\|\bar{w}\|$ av vektorerna $\bar{v}$ och $\bar{w}$.

3. Bestäm vinkeln mellan vektorerna $\bar{v}$ och $\bar{w}$.

4. Bestäm enhetsvektorn (dvs. vektorn vars norm är ett) som är likriktad med vektorn $\bar{v}$.

Uppgift II

Vektorerna i följande uppgifter hör till rummet $\mathbb{R}^n$.

5. Låt $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$, $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$, $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ och $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$. Bestäm $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

6. Antag, att $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ och $\bar{v} \cdot \bar{w} = 3$. Bestäm $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

Uppgift III

Antag, att $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ och $\bar{w} \neq \bar{0}$. Vektorn

$$\operatorname{proj}_{\bar{w}} \bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}} \bar{w}$$

är den vinkelräta projektionen av vektorn v på linjen som är likriktad med vektorn w. (Projektionen får senare en mera allmän definition.)

7. Låt $\bar{v} = [-3\ 1]^T$ ja $w = [1\ \ -1]^T$. Bestäm projektionen $\operatorname{proj}_{\bar{w}} \bar{v}$.

8. Rita en bild av vektorerna $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\text{proj}_{\bar{w}}\bar{v}$ och $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}\bar{v}$ i föregående uppgift.

9. Antag, att $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Visa, att vektorerna $\bar{w}$ och $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}\bar{v}$ är vinkelräta sinsemellan. Jämför resultatet med bilden i uppgift **??**.

Uppgift IV

Vi betecknar $\bar{x} = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T$, där $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Vi definierar $\bar{w} = [-1\ 3]^T$ och $\bar{v} = [9\ 2]^T$. Undersök om vektorerna $\bar{v}$ och $\bar{w}$ är ortogonala (dvs. vinkelräta sinsemellan), ifall inre produkten för rummet $\mathbb{R}^2$ är definierat genom

10. $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = w_1 v_1 + w_2 v_2$

11. $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 2w_1 v_1 + 3w_2 v_2$

12. $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = \bar{w}^T A \bar{v}$, där
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uppgift V

Basen för ett linjärt rum kallas ortogonalt om basens alla vektorer är vinkelräta sinsemellan. Om dessutom normen för alla basvektorer är ett, är basen ortonormerad. I följande uppgifter ser vi att koordinaterna för en vektor med avseende på en ortonormerad bas är lätta att hitta .

13. Antag, att $T = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ är en ortonormerad bas för det linjära rummet V. Låt $\bar{w} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3$, där $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$. Bestäm $\langle \bar{w}, \bar{a}_i \rangle$ för alla $\bar{a}_i \in T$.

14. Det linjära rummet $\mathbb{R}^3$ har en bas $S = \{[1\,1\,1]^T,\ [-1\,2\,-1]^T,\ [-2\,0\,2]^T\}$. Visa, att S är ortogonal.

15. Omforma basen S så, att den blir ortonormerad.

16. Bestäm koordinatvektorn för vektorn $[1\ 2\ 3]^T$ med avseende på den ortonormerade basen du fått i uppgift 15.

Uppgift VI

Undersök om det är möjligt att definiera en inre produkt i rummet $\mathbb{R}^3$ genom

17. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 3x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2x_3 y_3$

18. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - 2x_3 y_3$.

för alla $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$.