Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 7.11.2011 klo 16.00
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 11.11.2011 klo 17.00

Näissä laskuharjoituksissa käsiteltäviä asioita ovat

- Sisätulot, erityisesti pistetulo
- Normi
- Vektorien välinen kulma sekä kohtisuoruus
- Ortogonaalinen ja ortonormaali kanta

Tehtävä I

Merkitään $\bar{v} = [-1\ 2\ \ -2]^T$ ja $\bar{w} = [5\ \ -2\ 1]^T \in \mathbb{R}^3$.

1. Määritä pistetulo $\bar{v} \cdot \bar{w}$.
2. Laske vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ normit $\|\bar{v}\|$ ja $\|\bar{w}\|$.
3. Määritä vektorien $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ välinen kulma.
4. Anna vektorin $\bar{v}$ suuntainen yksikkövektori (eli vektori, jonka normi on yksi).

Tehtävä II

Seuraavissa tehtävissä käsiteltävät vektorit kuuluvat avaruuteen $\mathbb{R}^n$.

5. Olkoon $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$, $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$, $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$. Määritä $\bar{a} \cdot \bar{b}$.
6. Oletetaan, että $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = 3$. Määritä $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

Tehtävä III

Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq \bar{0}$. Vektori

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}\bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}\bar{w}$$

on vektorin $\bar{v}$ kohtisuora projektio vektorin $\bar{w}$ suuntaiselle suoralle. (Projektiolle annetaan myöhemmin hieman yleisempi määritelmä.)

7. Olkoon $\bar{v} = [-3\ 1]^T$ ja $w = [1\ \ -1]^T$. Määritä projektio $\mathrm{proj}_w \bar{v}$.
8. Piirrä kuva edellisen tehtävän vektoreista $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\mathrm{proj}_w \bar{v}$ ja $\bar{v} - \mathrm{proj}_w \bar{v}$.
9. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että vektorit $\bar{w}$ ja $\bar{v} - \mathrm{proj}_w \bar{v}$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Vertaa osoittamaasi tulosta tehtävässä 8 piirrettyyn kuvaan.

Tehtävä IV

Merkitään $\bar{x} = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$, kun $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Määritellään $\bar{w} = [-1\ 3]^T$ ja $\bar{v} = [9\ 2]^T$. Tutki, ovatko vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ortogonaaliset (eli kohtisuorassa toisiaan vastaan), jos avaruuden $\mathbb{R}^2$ sisätulo on määritelty asettamalla

10. $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = w_1 v_1 + w_2 v_2$
11. $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 2w_1 v_1 + 3w_2 v_2$
12. $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = \bar{w}^T A \bar{v}$, missä
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tehtävä V

Vektoriavaruuden kantaa kutsutaan ortogonaaliseksi, jos kannan kaikki vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Jos lisäksi kaikkien kantavektorien normi on yksi, on kanta ortonormaali. Seuraavissa tehtävissä nähdään, että ortonormaalin kannan suhteen vektorin koordinaatit on helppo löytää.

13. Oletetaan, että $T = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ on vektoriavaruuden V ortonormaali kanta. Olkoon $\bar{w} = k_1\bar{a}_1 + k_2\bar{a}_2 + k_3\bar{a}_3$, missä $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$. Määritä $\langle \bar{w}, \bar{a}_i \rangle$ kaikilla $\bar{a}_i \in T$.
14. Vektoriavaruudella $\mathbb{R}^3$ on kanta $S = \{[1\ 1\ 1]^T,\ [-1\ 2\ -1]^T,\ [-2\ 0\ 2]^T\}$. Osoita, että S on ortogonaalinen.
15. Muokkaa kantaa S niin, että saat siitä ortonormaalin.
16. Määritä vektorin $[1\ 2\ 3]^T$ koordinaattivektori saamasi ortonormaalin kannan suhteen.

Tehtävä VI

Tutki, saadaanko avaruuteen $\mathbb{R}^3$ sisätulo määrittelemällä kaikilla $\bar{x}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^3$

17. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 3x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3$
18. $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_3$.