Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 6

Tehtävien palautus: ke 19.10. klo 13.00 kurssikokeeen yhteydessä.

Tällä viikolla harjoituksissa jaetaan lisäpisteitä kaikista tehtävistä, joiden tekemistä on rehellisesti yritetty. Kaikki laskuharjoitukset tulee palauttaa samalla kertaa, eli osissa palauttaminen ei tällä viikolla ole mahdollista. Laskuharjoitukset palautetaan kurssikokeen yhteydessä.

Näissä laskuharjoituksissa keskeisiä asioita ovat

- Kanta
- Dimensio
- Koordinaatit

1. Oletetaan, että vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuden W alkioita ovat muun muassa vektorit $[1\ 1\ 0]^T$ ja $[4\ 0\ 0]^T$. Mitkä seuraavista vektoreista ovat myös aliavaruudessa W? Perustele vastauksesi.

$$[2\ 0\ 0]^T, \quad [-30\ 1\ 0]^T, \quad [1\ 1\ 1]^T$$

2. Osoita, että joukko $W = \left\{[c_1\ c_2\ 2c_2]^T \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

3. a) Määritellään

$$\bar{a} = [2\ 0\ 1\ 4]^T, \quad \bar{b} = [1\ 2\ 0\ 0]^T, \quad \bar{c} = [3\ 1\ 0\ 2]^T, \quad \bar{d} = [4\ -4\ 3\ 12]^T.$$

Viime viikolla osoitettiin, että $\bar{d} \in \operatorname{span}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Onko vektori $\bar{c}$ aliavaruudessa $\operatorname{span}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}\}$?

   b) Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in V$. Osoita, että jos $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ on vapaa, niin myös joukko $\{\bar{v}_1 - \bar{v}_3, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \bar{v}_3\}$ on vapaa.

4. Mitkä seuraavista joukoista muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^4$ kannan? Mitkä niistä virittävät avaruuden $\mathbb{R}^4$? (Vihje: 2.5.6 & 2.5.14.)

   a) $\{[-1\ 2\ 4\ 0]^T,\ [-3\ 1\ 1\ 0]^T,\ [0\ 0\ 0\ 2]^T\}$
   b) $\{[1\ 0\ 0\ 1]^T,\ [0\ 1\ 0\ 0]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T,\ [1\ 1\ 1\ 0]^T\}$
   c) $\{[1\ 1\ 0\ 0]^T,\ [2\ 2\ 0\ 0]^T,\ [0\ 0\ 1\ 0]^T,\ [0\ 0\ 0\ 1]^T\}$

d) $\{[1\ 1\ 0\ 0]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T,\ [0\ 0\ 1\ 0]^T,\ [0\ 0\ 0\ 1]^T,\ [2\ 2\ 0\ 0]^T\}$.

Olkoon V vektoriavaruus, jolla on kanta $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Tällöin vektori $\bar{v} \in V$ voidaan kirjoittaa kannan alkioiden lineaarikombinaationa:

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n \quad \text{joillakin } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Kertoimet $a_1, a_2, \ldots, a_n$ määrittävät vektorin $\bar{v}$ täydellisesti. Jos kertoimet tunnetaan, tiedetään täsmälleen, millainen vektori $\bar{v}$ on.

Kertoimia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kutsutaan vektorin v *koordinaateiksi* ja vektoria $[\bar{v}]_S = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]^T$ vektorin $\bar{v}$ *koordinaattivektoriksi* kannan S suhteen. Huomaa, että vektorin koordinaatit riippuvat aina valitusta kannasta.

5. Olkoon $\bar{v}_1 = [1\ 1]^T$ ja $\bar{v}_2 = [-2\ 3]^T$ sekä $\bar{e}_1 = [1\ 0]^T$ ja $\bar{e}_2 = [0\ 1]^T$.

   a) Osoita, että joukko $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanta.

   b) Määritä vektorin $\bar{a} = [1\ 6]^T$ koordinaattivektori kannan S suhteen.

   c) Määritä vektori $\bar{b} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaattivektori kannan S suhteen on $[3\ -1]^T$. Toisin sanoen määritä $\bar{b} \in \mathbb{R}^2$, jolle pätee $[\bar{b}]_S = [3\ -1]^T$.

   d) Piirrä vektoreista $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ kaksi kuvaa: toinen, jossa koordinaattiakselit ovat luonnollisen kannan kantavektorien $\bar{e}_1$ a $\bar{e}_2$ suuntaiset, ja toinen, jossa koordinaattiakselit ovat kannan S vektorien suuntaiset.

6. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ ovat kuusi avaruuden $\mathbb{R}^5$ vektoria. Valitse seuraavissa tapauksissa oikea vaihtoehto. Muista perustella vastauksesi.

   a) Vektorit $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *virittävät avaruuden* $\mathbb{R}^5$ / *saattavat virittää avaruuden* $\mathbb{R}^5$ / *eivät viritä avaruutta* $\mathbb{R}^5$.

   b) Vektorit $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *ovat* / *saattavat olla* / *eivät ole* lineaarisesti riippumattomia.

   c) Satunnaisesti valitut viisi vektoria vektoreista $\bar{v}_1,\ \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *muodostavat aina kannan* / *saattavat muodostaa kannan* / *eivät koskaan muodosta kantaa* avaruudelle $\mathbb{R}^5$.

7. Määritä kanta vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruudelle
$$W = \{\, [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \text{ ja } x_2 - x_3 = 0 \,\}.$$
   Mikä on aliavaruuden W dimensio?

8. Anna kurssipalautetta! Antamalla palautetta kartutat tekemiesi tehtävien määrää viiden tehtävän verran. Palautteen antaminen on meille tärkeää, jotta osaamme kehittää opetustamme eteenpäin. Palautteessa pyydetään opiskelijanumero, jotta ylimääräiset pisteet voidaan lisätä oikealle opiskelijalle. Palautteessa on kysymyksiä myös kokeesta, joten palautetta antaa vasta kokeen jälkeen. Saat kokeen jälkeen weboodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautteen.