Linjär algebra och matrisräkning I
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 6

Inlämning av uppgifter: ons 19.10. kl 13.00 i samband med kursprovet.

Denna vecka får man tilläggspoäng för alla uppgifter man uppriktigt försökt lösa. Alla uppgifter skall lämnas in samtidigt, man kan alltså inte lämna in uppgifterna en i sänder. Inlämningen sker tillsammans med kursprovet.

Centralt för dessa räkneövningar är

- Repetition av delrum, av att spänna upp ett delrum och linjärt oberoende
- Bas
- Dimension
- Koordinater

1. Vi antar att vektorerna $[1\ 1\ 0]^T$ och $[4\ 0\ 0]^T$ är element i delrummet W till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$. Vilka av vektorerna

$$[2\ 0\ 0]^T, \quad [-30\ 1\ 0]^T, \quad [1\ 1\ 1]^T$$

är också vektorer i delrummet W? Motivera ditt svar.

2. Visa att mängden $W = \left\{[c_1\ c_2\ 2c_2]^T \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$ är ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$.

3. a) Vi definierar

$$\bar{a} = [2\ 0\ 1\ 4]^T, \quad \bar{b} = [1\ 2\ 0\ 0]^T, \quad \bar{c} = [3\ 1\ 0\ 2]^T, \quad \bar{d} = [4\ -4\ 3\ 12]^T.$$

Förra veckan visade vi att $\bar{d} \in \text{span}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Är vektorn $\bar{c}$ ett element i delrummet $\text{span}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}\}$?

b) Vi antar att V är ett linjärt rum och att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in V$. Visa att om $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är linjärt oberoende, så är också mängden $\{\bar{v}_1 - \bar{v}_3, \bar{v}_2 - \bar{v}_3, \bar{v}_3\}$ linjärt oberoende.

4. Vilka av följande mängder bildar en bas till rummet $\mathbb{R}^4$? Vilka av följande vektorer spänner upp rummet $\mathbb{R}^4$? (Tips: 2.5.6 & 2.5.14.)

a) $\{[1\ 2\ 1\ 0]^T,\ [1\ 1\ -1\ 0]^T,\ [0\ 0\ 0\ 1]^T\}$.

b) $\{[1\ 0\ 0\ 1]^T,\ [0\ 1\ 0\ 0]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T,\ [1\ 1\ 1\ 0]^T\}$.

c) $\{[6\ \ 4\ -2\ 4]^T,\ [2\ 0\ 0\ 1]^T,\ [3\ 2\ -1\ 2]^T,\ [5\ 6\ -3\ 2]^T,\ [0\ 4\ -2\ -1]^T\}$.

d) $\{[1\ 1\ 0\ 0]^T,\ [1\ 2\ \ -1\ 1]^T,\ [0\ 0\ 1\ 1]^T,\ [2\ 3\ 1\ 3]^T\}$.

Låt V vara ett linjärt rum med basen $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Då kan varje vektor $\bar{v} \in V$ uttryckas på ett och endast ett sätt som en linjär kombination

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n$$

av elementen i basen. Koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bestämmer vektorn $\bar{v}$ entydigt. Om vi känner till koefficienterna, vet vi exakt vilken vektorn $\bar{v}$ är och omvänt, om vi känner till vektorn $\bar{v}$ så vet vi exakt vilka koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är.

Koefficienterna $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kallas för koordinaterna för vektorn v och vektorn

$$[\bar{v}]_S = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]^T$$

för koordinatvektorn för vektorn $\bar{v}$ med avseende på basen S. Märk att koordinaterna för vektorn alltid beror på den valda basen.

5. Betrakta vektorerna $\bar{v}_1 = [1\ 1]^T$, $\bar{v}_2 = [-2\ 3]^T$, $\bar{e}_1 = [1\ 0]^T$ och $\bar{e}_2 = [0\ 1]^T$.

   a) Visa att mängden $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ är en bas för rummet $\mathbb{R}^2$.

   b) Bestäm koordinatvektorn $[\bar{a}]_S$ för vektorn $\bar{a} = [1\ 2]^T$ med avseende på basen S.

   c) Bestäm vektorn $\bar{b} \in \mathbb{R}^2$, vars koordinatvektor med avseende på basen S är $[4\ -5]^T$. Med andra ord, bestäm $\bar{b} \in \mathbb{R}^2$ så att $[\bar{b}]_S = [4\ -5]^T$.

   d) Rita vektorerna $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ i två olika figurer; en i vilken koordinataxlarna har samma riktning som basvektorerna $\bar{e}_1 = [1\ 0]^T$ och $\bar{e}_2 = [0\ 1]^T$, och en där koordinataxlarna har samma riktning som vektorerna i basen S.

6. Vi antar att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ är sex vektorer i rummet $\mathbb{R}^5$. Välj rätt alternativ till följande påståenden. Kom ihåg att motivera dina svar.

   a) Vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *spänner upp rummet* $\mathbb{R}^5$ / *spänner möjligen upp rummet* $\mathbb{R}^5$ / *spänner inte upp rummet* $\mathbb{R}^5$.

   b) Vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6$ *är* / *är möjligen* / *är inte* linjärt oberoende.

   c) Fem på måfå valda vektorer ur mängden $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_6\}$ *bildar en bas* / *bildar möjligen en bas* / *bildar aldrig en bas* till rummet $\mathbb{R}^5$.

7. Bestäm en bas till delrummet

$$W = \{\, [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \text{ och } x_2 - x_3 = 0 \,\}$$

till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$. Vilken dimension har delrummet W?

8. Ge feedback på kursen. (Motsvarar fem uppgifter.)