Linjär algebra och matrisräkning I
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 5

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 10.10 kl. 18.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 14.10. kl. 17.00.

Liksom förra veckan rättas endast de uppgifter som är märkta med stjärna. För att man skall få tilläggspoäng för uppgifter som är märkta med stjärna måste de vara korrekt lösta. Stjärnuppgifter får man rätta och returnera på nytt. För de övriga uppgifterna får man tilläggspoäng om man försökt lösa dem ordentligt.
Centralt för dessa räkneövningar är

- Att spänna upp
- Linjärt oberoende
- Bas

I uppgifterna **??**–**??** undersöker vi vektorer i det linjära rummet $\mathbb{R}^2$

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

samt matriserna

$$B = \begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}.$$

1. Rita vektorerna v_1, v_2, v_3, v_4 och v_5 som punkter i koordinatsystemet och dra sträck mellan dem i nummerordning.

Matriser kan tänkas som avbildningar som avbildar vektorer till andra vektorer. För detta ändamål används matrismultiplikation. Om till exempel $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, kan vi bilda avbildningen

$$f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_A(\bar{v}) = A\bar{v}.$$

Vektorn $\bar{v}$ avbildas alltså till vektorn $A\bar{v}$.

2. * Bestäm vektorerna $f_B(v_1)$, $f_B(v_2)$, $f_B(v_3)$, $f_B(v_4)$ ja $f_B(v_5)$, där B är matrisen som definierades i början av uppgiftspappret.

3. Rita en bild av vektorerna $f_B(v_1), f_B(v_2), \ldots, f_B(v_5)$ och dra sträck mellan punkterna i nummerordning. Vad märker du?

4. Bestäm vektorerna $f_C(v_1), f_C(v_2), \ldots, f_C(v_5)$, där C är matrisen som definierades i början av uppgiftspappret.

5. Rita en bild av vektorerna $f_C(v_1), f_C(v_2), \ldots, f_C(v_5)$ och dra sträck mellan punkterna i nummerordning. Vad märker du?

6. Berätta med egna ord varför en elementärmatris alltid har en invers.

I uppgifterna **??**–**??** undersöker vi linjen ℓ, som går genom punkterna $A = (1, 2)$ ja $B = (-4, 5)$.

7. * Rita ortsvektorn som motsvarar vektorn $\overline{AB}$. Bestäm genom bilden är vektorn (dvs. punkten som motsvarar vektorn) på linjen ℓ.

8. Välj två punkter som är på linjen ℓ och rita ortsvektorerna som motsvarar dem.

9. * Räkna ut summan av vektorerna du valt ut i föregående uppgifter och rita ortsvektorn som motsvarar summan. Bestäm genom bilden är vektorn på linjen ℓ.

Genom de två föregående uppgifterna märker vi att om en linje inte går genom origo så saknar den egenskaper som delrum har. I själva verket ifall en linje inte går genom origo så har den inte en ända av de egenskaper som delrum enligt definitionen har.

10. * Bestäm det delrum som vektorn $[1\ 2]^T$ i rummet $\mathbb{R}^2$ spänner upp. Rita en bild på delrummet.

I uppgifterna **??**–**??** undersöker vi vektorer i rummet $\mathbb{R}^4$

$$\bar{a} = [2\ 0\ 1\ 4]^T, \quad \bar{b} = [1\ 2\ 0\ 0]^T, \quad \bar{c} = [3\ 1\ 0\ 2]^T, \quad \bar{d} = [4,\ -4\ 3\ 12]^T.$$

Vi vill utreda om vektorn $\bar{d}$ är en linjärkombination av vektorerna $\bar{a}$, $\bar{b}$ och $\bar{c}$. Vi måste alltså utreda om ekvationen

$$\bar{d} = x_1\bar{a} + x_2\bar{b} + x_3\bar{c}$$

satisfieras av några $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

11. Skriv ekvationen ovan i sådan form att den bildar ett ekvationssystem.

12. Lös ekvationssystemet i föregående uppgift.

13. * Är vektorn $\bar{d}$ en linjärkombination av vektorerna $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$? Med andra ord: hör vektorn $\bar{d}$ till delrummet som spänns upp av vektorerna $\bar{a}$, $\bar{b}$ och $\bar{c}$? Det vill säga, gäller $\bar{d} \in \operatorname{span}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$?

14. * Vi antar att $[b_1\ b_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Visa att $[b_1\ b_2]^T$ kan uttryckas som en linjärkombination av vektorerna $[1\ 5]^T$ ja $[-5\ -1]^T$. Det vill säga, vektorerna $[1\ 5]^T$ ja $[-5\ -1]^T$ spänner upp det linjära rummet $\mathbb{R}^2$.

15. * Efter att ha arbetat hårt hela morgonen med ett bevis i linjär algebra, fäller din katt en tekopp på dina anteckningar. Anteckningarna hittar du i slutet av dessa räkneövningar. Bara en del av dina anteckningar är läsbara. Kompletera anteckningarna och returnera sidan med resten av dina svarspapper.

16. Låt $\bar{v}_1 = [1\ 5]^T$ och $\bar{v}_2 = [-5\ -1]^T$. Antag att för $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gäller att $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 = 0$. Visa, att $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$.

17. * Är följden i $\mathbb{R}^2$, $([1\ 5]^T,\ [-5\ -1]^T)$, linjärt oberoende? Rita en bild av situationen.

18. * Är följden i $\mathbb{R}^2$, $([3\ 1]^T,\ [-6\ -2]^T)$, linjärt oberoende? Rita en bild av situationen.

Är följden $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ linjärt oberoende i följande fall? Motivera dina svar noggrant.

19. * $\bar{a}_1 = [1\ 0\ 2]^T$, $\bar{a}_2 = [3\ 1\ 0]^T$ och $\bar{a}_3 = [1\ 1\ 1]^T$

20. * $\bar{a}_1 = [4\ 2\ 1]^T$, $\bar{a}_2 = [4\ -3\ 2]^T$ och $\bar{a}_3 = [0\ 5\ -1]^T$

21. * Vi antar att V är ett linjärt rum och att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \in V$. Visa, att om $v_4 \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ så är följden $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ linjärt beroende.

22. * Visa att vektorerna a_1, a_2 ja a_3 i uppgift **??** bildar en bas för rummet $\mathbb{R}^3$.

23. Bestäm vektorn $[1\ -2\ 4]^T \in \mathbb{R}^3$ med hjälp av basen i föregående uppgift. Hittar du på flera än ett sätt?

24. Vi antar att U och W är delrum till det linjära rummet V. Visa att snittet
$$U \cap W = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} \in U \text{ och } \bar{v} \in W\}$$
är ett derum till rummet V.

25. Delrum till rummet $\mathbb{R}^3$ är till exempel de linjer och planer som går genom origo. Fundera över hurudant kan snittet av sådana delrum vara.

Påstående: Vi antar att V är ett linjärt rum och $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \in V$. Då gäller att $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$ är ett delrum till rummet V.

Bevis: Vi betecknar $W = \operatorname{span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n)$.

i) Låt $\bar{v}, \bar{w} \in W$. Då gäller att

$$\bar{v} = a_1\bar{w}_1 + a_2\bar{w}_2 + \cdots + a_n\bar{w}_n$$

och

$$\underline{\hspace{6cm}}$$

för några $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Vi märker att

$$\begin{aligned} \bar{v} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n) + (b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 + \cdots + b_n\bar{v}_n) \\ &= \underline{\hspace{8cm}} \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + (a_2 + b_2)\bar{v}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\bar{v}_n, \end{aligned}$$

alltså gäller att ____________.

ii) Vi antar att $\bar{v} \in W$ ja ____________. Nu gäller att $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ för några ____________________________. Alltså får vi att

$$\begin{aligned} \underline{\hspace{1.5cm}} &= r(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n) \\ &= \underline{\hspace{6cm}}, \end{aligned}$$

alltså gäller $r\bar{v} \in W$.

iii) Vi märker att $\bar{0} =$ ______________________________, vilket leder till att $\bar{0} \in W$.

Alltså är W ett delrum till rummet V.