Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 10.10. klo 18.00.
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 14.10. klo 17.00.

Viime viikon tapaan tehtävistä tarkistetaan ainoastaan ne, jotka on merkitty tähdellä. Jotta tähdellä merkityistä tehtävistä saisi lisäpisteitä, on niiden oltava oikein. Tähtitehtäviä saa korjata ja palauttaa uudelleen. Muista tehtävistä saa lisäpisteitä, kunhan niiden tekemistä on yrittänyt rehellisesti.

Näiden laskuharjoitusten keskeisiä asioita ovat

- Virittäminen
- Vapaus
- Kanta

Tehtävissä 1–5 tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ vektoreita

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

sekä matriiseja

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Piirrä vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$ ja $\bar{v}_5$ koordinaatiston pisteinä ja yhdistä ne toisiinsa viivalla numerojärjestyksessä.

Matriiseja voidaan ajatella kuvauksina, jotka kuvaavat vektoreita toisiksi vektoreiksi. Tähän käytetään matriisikertolaskua. Jos esimerkiksi $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, voidaan muodostaa kuvaus

$$f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f_A(\bar{v}) = A\bar{v}.$$

Vektori $\bar{v}$ kuvautuu siis vektorille $A\bar{v}$.

2. * Määritä vektorit $f_B(\bar{v}_1)$, $f_B(\bar{v}_2)$, $f_B(\bar{v}_3)$, $f_B(\bar{v}_4)$ ja $f_B(\bar{v}_5)$, missä B on tehtäväpaperin alussa määritelty matriisi.

3. Piirrä kuva vektoreista $f_B(\bar{v}_1), f_B(\bar{v}_2), \ldots, f_B(\bar{v}_5)$ ja yhdistä pisteet toisiinsa numerojärjestyksessä. Mitä huomaat?

4. Määritä vektorit $f_C(\bar{v}_1), f_C(\bar{v}_2), \ldots, f_C(\bar{v}_5)$, missä C on tehtäväpaperin alussa määritelty matriisi.

5. Piirrä kuva vektoreista $f_C(\bar{v}_1), f_C(\bar{v}_2), \ldots, f_C(\bar{v}_5)$ ja yhdistä pisteet toisiinsa numerojärjestyksessä. Mitä huomaat?

6. Kerro omin sanoin, miksi alkeismatriisilla on aina käänteismatriisi.

Tehtävissä 7–9 tutkitaan suoraa ℓ, joka kulkee pisteiden $A = (1, 2)$ ja $B = (-4, 5)$ kautta.

7. * Piirrä vektoria $\overline{AB}$ vastaava paikkavektori. Määritä kuvan perusteella, onko vektori (eli sitä vastaava piste) suoralla ℓ.

8. Valitse kaksi suoralla ℓ olevaa pistettä ja piirrä niitä vastaavat paikkavektorit.

9. * Laske edellisessä tehtävässä valitsemiesi vektorien summa ja piirrä sitä vastaava paikkavektori. Määritä kuvan perusteella, onko summavektori suoralla ℓ.

Kahdesta edellisestä tehtävästä huomataan, että jos suora ei kulje origon kautta, sillä ei ole alivaruuden ominaisuuksia. On itse asiassa niin, että jos suora tai taso ei kulje origon kautta, se ei toteuta yhtäkään aliavaruuden määritelmässä mainituista ehdoista.

10. * Määritä avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorin $[1\ 2]^T$ virittämä aliavaruus. Piirrä siitä kuva.

Tehtävissä 11–13 tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreita

$$\bar{a} = [2\ 0\ 1\ 4]^T, \quad \bar{b} = [1\ 2\ 0\ 0]^T, \quad \bar{c} = [3\ 1\ 0\ 2]^T, \quad \bar{d} = [4\ -4\ 3\ 12]^T.$$

Halutaan selvittää, onko vektori $\bar{d}$ vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarikombinaatio. On siis selvitettävä, toteutuuko yhtälö

$$\bar{d} = x_1\bar{a} + x_2\bar{b} + x_3\bar{c}$$

joillakin $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

11. Kirjoita edellä annettu yhtälö auki ja muokkaa sitä niin, että saat yhtälöryhmän.

12. Ratkaise edellisessä tehtävässä muodostamasi yhtälöryhmä.

13. * Onko vektori $\bar{d}$ vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ lineaarikombinaatio? Toisin sanottuna: kuuluuko vektori $\bar{d}$ vektoreiden $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{c}$ virittämään aliavaruuteen? Eli päteekö $\bar{d} \in \operatorname{span}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$?

14. * Oletetaan, että $[b_1\ b_2]^T \in \mathbb{R}^2$. Osoita, että $[b_1\ b_2]^T$ voidaan esittää vektorien $[1\ 5]^T$ ja $[-5\ \ -1]^T$ lineaarikombinaationa. Vektorit $[1\ 5]^T$ ja $[-5\ \ -1]^T$ siis virittävät vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$.

15. * Uurastettuasi koko aamun lineaarialgebran todistuksen parissa, kissasi kaatoi teekupin muistiinpanojesi päälle. Muistiinpanot löytyvät näiden laskuharjotusten viimeiseltä sivulta. Vain osa tekstistä säilyi lukukelpoisena. Täydennä muistiinpanot tehtäväpaperiin ja palauta sivu muiden ratkaisujesi mukana.

16. Merkitään $\bar{v}_1 = [1\ 5]^T$ ja $\bar{v}_2 = [-5\ \ -1]^T$. Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ovat sellaisia, että $x_1\bar{v}_1 + x_2\bar{v}_2 = 0$. Osoita, että $x_1 = 0$ ja $x_2 = 0$.

17. * Onko $\mathbb{R}^2$ joukko $\{[1\ 5]^T,\ [-5\ \ -1]^T\}$ vapaa (eli lineaarisesti riippumaton)? Piirrä tilanteesta kuva.

18. * Onko $\mathbb{R}^2$ joukko $\{[3\ 1]^T,\ [-6\ \ -2]^T\}$ vapaa? Piirrä tilanteesta kuva.

Onko joukko $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ vapaa seuraavissa tapauksissa? Perustele vastauksesi huolellisesti.

19. * $\bar{a}_1 = [1\ 0\ 2]^T$, $\bar{a}_2 = [3\ 1\ 0]^T$ ja $\bar{a}_3 = [1\ 1\ 1]^T$

20. * $\bar{a}_1 = [4\ 2\ 1]^T$, $\bar{a}_2 = [4\ \ -3\ 2]^T$ ja $\bar{a}_3 = [0\ 5\ \ -1]^T$

21. * Oletetaan, että V vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4 \in V$. Osoita, että jos $v_4 \in \operatorname{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, niin joukko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ ei ole vapaa.

22. * Osoita, että tehtävän 19 vektorit $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ ja $\bar{a}_3$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannan.

23. Kirjoita vektori $[1\ \ -2\ 4]^T \in \mathbb{R}^3$ edellisen tehtävän kannan avulla. Keksitkö useamman kuin yhden tavan?

24. Oletetaan, että U ja W ovat vektoriavaruuden V aliavaruuksia. Osoita, että leikkaus
$$U \cap W = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} \in U \text{ ja } \bar{v} \in W\}$$
on avaruuden V aliavaruus.

25. Avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia ovat muun muassa origon kautta kulkevat suorat ja tasot. Mieti, millainen voi olla kahden tällaisen aliavaruuden leikkaus.

Väite: Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n \in V$. Tällöin $\mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ on avaruuden V aliavaruus.

Todistus: Merkitään $W = \mathrm{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$.

Ensinnäkin huomataan, että $W \subset V$, sillä vektoriavaruus V sisältää kaikki vektoriensa lineaarikombinaatiot.

i) Olkoot $\bar{v}, \bar{w} \in W$. Tällöin

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n$$

ja

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

joillakin $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ja $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Huomataan, että

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= (a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n) + (b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 + \cdots + b_n\bar{v}_n) \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ &= (a_1 + b_1)\bar{v}_1 + (a_2 + b_2)\bar{v}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\bar{v}_n,\end{aligned}$$

joten $\underline{\qquad\qquad\quad}$.

ii) Oletetaan, että $\bar{v} \in W$ ja $\underline{\qquad\qquad\quad}$. Nyt $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n$ joillakin $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\underline{\qquad\qquad} &= r(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_n\bar{v}_n) \\ &= \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad},\end{aligned}$$

joten $r\bar{v} \in W$.

iii) Huomataan, että $\bar{0} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$, mistä seuraa, että $\bar{0} \in W$.

Siten W on avaruuden V aliavaruus.