Linjär algebra och matrisräkning I
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 4

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 3.10 kl. 18.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 7.10. kl. 17.00.

OBS! Denna vecka rättas endast de uppgifter som är märkta med stjärna. För att man skall få tilläggspoäng för uppgifter som är märkta med stjärna måste de vara korrekt lösta. Stjärnuppgifter får man rätta och returnera på nytt. För de övriga uppgifterna får man tilläggspoäng om man försökt lösa dem ordentligt.

Centralt för veckans uppgifter är

- Vektorer
- Linjärt rum (vektorrum)
- Delrum
- Att spänna upp

I följande uppgifter undersöker vi matrismängden $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Man brukar beteckna $\mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$ och kalla mängdens element kolumnvektorer (kolonnvektorer) eller bara vektorer. Kolumnvektorer har många olika geometriska tolkningar.

i) Kolumnvektorer kan representeras som punkter i ett koordinatsystem. Till exempel kan vektorn $[a\ b]^T$ i mängden identifieras med punkten (a, b) i $\mathbb{R}^2$.

ii) En kolumnvektor kan ritas som en pil med begynnelsepunkt i origo och ändpunkt i den punkt i koordinatsystemet med vilken vektorn identifierats (se i) ovan). Till exempel representeras vektorn $[a\ b]^T$ i mängden $\mathbb{R}^2$ med en pil vars begynnelsepunkt är i origo och ändpunkt (a, b). Denna vektor kallas för ortsvektorn för punkten (a, b).

iii) Vi kan tänka oss en vektor som en pil med längd och riktning i ett koordinatsystem. Var pilen befinner sig spelar ingen roll. Till exempel motsvaras vektorn $[a\ b]^T$ i $\mathbb{R}^2$ med vilken pil som helst som har samma riktning och längd som ortsvektorn för punkten (a, b).

1. Tolka följande vektorer som punkter i xy-koordinatsystemet och rita dem:
$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ \bar{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Fortsätt med att undersöka vektorerna i föregående uppgift. Beräkna följande vektorer:
$$\bar{v} + \bar{u}, \ \bar{v} + \bar{w}, \ 3\bar{u}, \ (-1)\bar{v}, \ \bar{v} + (-1)\bar{v}.$$

3. Rita de ortsvektorer som motsvarar vektorerna
$$\bar{v} + \bar{u}, \ \bar{v} + \bar{w}, \ 3\bar{u}, \ (-1)\bar{v}, \ \bar{v} + (-1)\bar{v}.$$

4. Tolka vektorerna i mängden $\mathbb{R}^1$ som punkter på tallinjen och rita motsvarande ortsvektor:
$$[2], \ [-4].$$

5. Undersök vektorn $\overline{PQ}$ med begynnelsepunkt $P = (-1, 2)$ och ändpunkt $Q = (0, 4)$. Rita vektorn. Rita sedan en ny bild där vektorns begynnelsepunkt är i origo. Vilket element i mängden $\mathbb{R}^2$ motsvarar vektorn?

Addition av två vektorer kan illustreras genom att flytta på vektorerna på följande sätt: Man lägger den andra termens begynnelsepunkt i ändpunkten till den första termen. Summavektorns begynnelsepunkt är den första termens begynnelsepunkt och ändpunkt den andra termens ändpunkt.

6. Illustrera med metoden ovan vektorerna $\bar{v} + \bar{u}$ och $\bar{v} + (-1)\bar{v}$ i uppgift 3.

Vi undersöker linjen ℓ, som går genom punkterna $A = (2, -1, 4)$ och $B = (1, -1, 3)$.

7. * Bestäm vektorn $\bar{a} = \overline{OA}$ ja $\bar{v} = \overline{AB}$.

8. * Bestäm linjens ℓ ekvation i parameterform. (se s. 44.)

9. Ge ett exempel på en punkt på linjen ℓ, som inte är A eller B.

10. Går linjen ℓ genom origo?

Vi undersöker planet T, som går genom punkterna $A = (-2, 3, 9)$, $B = (-1, 4, 10)$ och $C = (-5, 5, 17)$.

11. Bestäm vektorerna $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{v} = \overline{AB}$ och $\bar{w} = \overline{AC}$

12. * Bestäm ekvationen för planet T i parameterform.

13. Går planet T genom origo?

14. * Visa med ett motexempel att följande påstående är falskt.

    Låt $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ och $B, C \in \mathbb{R}^{n \times l}$. Om $AB = AC$, så är $B = C$.

    Lista ut om påståendena i uppgifterna 15–17 är sanna eller falska. Motivera dina svar.

15. * Sant eller falskt? Multiplikation av en rad i en matris med talet $1/\sqrt{2}$ är en elementär radoperation.

16. * Sant eller falskt? Om ett ekvationssystem innehåller flera obekanta än ekvationer, har ekvationssystemet inte en entydig lösning.

17. Sant eller falskt? Om ett ekvationssystem innehåller lika många obekanta som ekvationer, har ekvationssystemet en entydig lösning.

Mängden av alla kolumnvektorer $\mathbb{R}^n$ är ett exempel av ett linjärt rum. (se def. 2.2.1.) Kort sagt är ett reellt linjärt rum en mängd där man kan addera element och multiplicera dem med reella tal. Dessa räkneoperationer följer vissa räkneregler. Dessutom finns det en nollvektor och varje vektor har också en motsatt (invers) vektor i mängden.

Linjära rum har delrum (def. 2.3.1). Till exempel linjer och planer som går genom origo är delrum.

18. * Visa att mängden $U = \{(a, a, 0) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ är ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$.

Varför definieras delrum så som det definieras? Vi vill att ett delrum är ett linjärt rum som är en del av ett linjärt rum. I ett delrum måste man alltså kunna addera element samt multiplicera dem med reella tal. Dessutom måste delrummet innehålla nollvektorn. Från dessa krav får vi delrummets definition. Kraven räcker för att garantera att delrummet är ett linjärt rum. Detta gäller p.g.a. definitionen leder till att en de inversa vektorerna till vektorerna i delrummet är element i delrummet. Detta får vi genom att multiplicera vektorn med skalären -1. Dessutom gäller det linjära rummets räknerägler automatiskt i delrummet p.g.a. att alla element i delrummet är också element i det linjära rummet.

Undersök i följande fall, om mängden U är ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$. (Tips: Du kan börja studerandet till exempel genom att ge ett exempel på ett element i U.)

19. * $U = \{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2^2 \,\}$

20. * $U = \{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2 \,\}$

21. * $U = \{\, \bar{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 \text{ tai } x_3 = x_2 \,\}$.

22. Är planet ℓ i uppgift 8 ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$?

23. Är planet T i uppgift 12 ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^3$?

24. Fortsättning till föregående uppgifter. Om linjen ℓ var ett delrum, ge ett exempel på vektorer som spänner upp delrummet i fråga. (Se s. 39–40.) Gör det samma för planet T.

I uppgifterna 25 – 29 är $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

25. Matrisen A är en vektor i det linjära rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$, som består av alla 2×2-matriser. Bestäm nollvektorn till detta linjära rum?

26. * Bestäm vektorerna $\frac{1}{2}A$ och $-A$?

27. * Vilket delrum spänner vektorn A upp? Med andra ord, vilket är det minsta delrummet till $\mathbb{R}^{2\times 2}$ som innehåller A?

28. Ge ett exempel på ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ som innehåller B men inte C.

29. * Om ett delrum till det linjära rummet $\mathbb{R}^{2\times 2}$ innehåller B och C, måste då också enhetsmatrisen I innehållas i det?

30. * Lös MATLAB-uppgiften på sidan:
`https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssienLisasivut/Linis+MATLAB-svenska`
Länken finns även på kursens hemsida.