Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 3.10 klo 18.00.
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 7.10. klo 17.00.

HUOM! Tällä viikolla tehtävistä tarkistetaan ainoastaan ne, jotka on merkitty tähdellä. Jotta tähdellä merkityistä tehtävistä saisi lisäpisteitä, on niiden oltava oikein. Tähtitehtäviä saa korjata ja palauttaa uudelleen. Muista tehtävistä saa lisäpisteitä, kunhan niiden tekemistä on yrittänyt rehellisesti.

Näiden laskuharjoitusten keskeisiä asioita ovat

- Vektorit
- Vektoriavaruudet
- Aliavaruudet
- Virittäminen

Seuraavissa tehtävissä tutkitaan $n\times 1$-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Tapana on merkitä $\mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$ ja kutsua joukon alkioita sarakevektoreiksi tai pelkästään vektoreiksi. Sarakevektoreita voidaan havainnollistaa geometrisesti koordinaatistossa usealla eri tavalla.

i) Sarakevektoreiden voidaan ajatella olevan koordinaatiston pisteitä. Esimerksi joukon $\mathbb{R}^2$ vektori $[a\ b]^T$ samastetaan pisteen (a, b) kanssa.

ii) Sarakevektori voidaan piirtää nuolena, jonka alkupiste on origo ja päätepiste vektoria vastaava koordinaatiston piste. Esimerkiksi joukon $\mathbb{R}^2$ vektoria $[a\ b]^T$ kuvaa nuoli, jonka lähtöpiste on origo ja päätepiste (a, b). Tätä vektoria kutsutaan pisteen (a, b) paikkavektoriksi.

iii) Voidaan ajatella, että vektori on koordinaatistoon piirretty nuoli, jolla on suunta ja pituus. Nuolen sijainnilla ei ole merkitystä. Esimerkiksi joukon $\mathbb{R}^2$ vektori $[a\ b]^T$ vastaa nyt mitä tahansa nuolta, jolla on sama suunta ja pituus kuin pistettä (a, b) vastaavalla paikkavektorilla.

1. Tulkitse seuraavat vektorit xy-koordinaatiston pisteiksi ja piirrä ne:

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \bar{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Tutkitaan vielä edellisen tehtävän vektoreita. Laske seuraavat vektorit:

$$\bar{v} + \bar{u}, \ \bar{v} + \bar{w}, \ 3\bar{u}, \ (-1)\bar{v}, \ \bar{v} + (-1)\bar{v}.$$

3. Piirrä vektoreita $\bar{v}$, $\bar{u}$, $\bar{v} + \bar{u}$ ja $3\bar{u}$ vastaavat paikkavektorit, missä $\bar{v}$ ja $\bar{u}$ ovat kuten edellä.

4. Tulkitse seuraavat joukon $\mathbb{R}^1$ vektorit lukusuoran pisteiksi ja piirrä niitä vastaavat paikkavektorit:
$$[2], \ [-4].$$

5. Tutkitaan vektoria $\overline{PQ}$, jonka alkupiste on $P = (-1, 2)$ ja päätepiste $Q = (0, 4)$. Piirrä vektorista kuva. Piirrä sitten vektorista toinen kuva, jossa olet siirtänyt sen alkamaan origosta. Mitä joukon $\mathbb{R}^2$ alkiota vektori vastaa?

Vektorien yhteenlaskua voidaan havainnollistaa liikuttelemalla vektoreita koordinaatistossa. Visuaalisesti vektorit summataan yhteen liittämällä ensimmäisen summattavan päätepisteeseen toisen summattavan alkupiste. Summavektorin alkupiste on ensimmäisen vektorin alkupiste ja päätepiste toisen vektorin päätepiste.

6. Havainnollista edellä kuvatulla tavalla tehtävässä 2 laskettuja vektoreita $\bar{v} + \bar{u}$ ja $\bar{v} + (-1)\bar{v}$.

Tutkitaan suoraa ℓ, joka kulkee pisteiden $A = (2, -1, 4)$ ja $B = (1, -1, 3)$ kautta.

7. * Määritä vektorit $\bar{a} = \overline{OA}$ ja $\bar{v} = \overline{AB}$.

8. * Määritä suoran ℓ parametrimuotoinen yhtälö. (Ks. s. 44.)

9. Anna esimerkki jostakin suoran ℓ pisteestä, joka ei ole A eikä B.

10. Kulkeeko suora ℓ origon kautta?

Tutkitaan tasoa T, joka kulkee pisteiden $A = (-2, 3, 9)$, $B = (-1, 4, 10)$ ja $C = (-5, 5, 17)$ kautta.

11. Määritä vektorit $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{v} = \overline{AB}$ ja $\bar{w} = \overline{AC}$

12. * Määritä tason T parametrimuotoinen yhtälö.

13. Kulkeeko taso T origon kautta?

14. * Osoita vastaesimerkillä, että seuraava väite ei päde.

$$\text{Olkoot } A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ ja } B, C \in \mathbb{R}^{n\times l}. \text{ Jos } AB = AC, \text{ niin } B = C.$$

Päättele tehtävissä 15–17, onko väite totta vai tarua. Perustele vastauksesi.

15. * Totta vai tarua? Matriisin rivin kertominen luvulla $1/\sqrt{2}$ ei ole alkeisrivitoimitus.

16. * Totta vai tarua? Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on yhtä monta tuntematonta kuin yhtälöä, on yhtälöryhmällä täsmälleen yksi ratkaisu.

17. Totta vai tarua? Jos lineaarisessa yhtälöryhmässä on enemmän tuntemattomia kuin yhtälöitä, ei yhtälöryhmällä ole yksikäsitteistä ratkaisua.

Sarakevektorien joukko $\mathbb{R}^n$ on esimerkki vektoriavaruudesta. (Ks. määr. 2.2.1.) Lyhyesti sanottuna reaalikertoiminen vektoriavaruus on joukko, jossa voidaan laskea alkioita yhteen ja kertoa niitä reaaliluvuilla. Näille laskutoimituksille pätee erilaisia laskusääntöjä. Lisäksi vektoriavaruudessa on olemassa erityinen nollavektori ja vektoreilla on vastavektorit.

Vektoriavaruuksilla on aliavaruuksia (määr. 2.3.1). Esimerkiksi origon kautta kulkevat suorat ja tasot ovat aliavaruuksia.

18. * Osoita, että joukko $U = \{[x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \text{ ja } x_3 = 0\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus.

Miksi aliavaruus määritellään niin kuin määritellään? Aliavaruus on annetun vektoriavaruuden osajoukko, mutta tämä ei riitä. Aliavaruuden halutaan olevan myös vektoriavaruus. Aliavaruudessa pitää siis pystyä summaamaan alkioita sekä kertomaan niitä reaaliluvuilla. Lisäksi aliavaruudessa on oltava nolla-vektori. Näistä ehdoista muodostuu aliavaruuden määritelmä. Ehdot riittävät takaamaan sen, että kyseessä on vektoriavaruus. Määritelmästä nimittäin seuraa, että aliavaruuden vektorin vastavektori kuuluu myös aina aliavaruuteen, sillä vastavektorit saadaan kertomalla vektoria skalaarilla -1. Lisäksi vektoriavaruuden laskusäännöt ovat automaattisesti voimassa aliavaruudessa, sillä kaikki aliavaruuden vektorit ovat myös ympäröivän vektoriavaruuden alkioita.

Tutki seuraavissa tapauksissa, onko joukko U vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus. (Vinkki: Voit aloittaa tutkimuksen vaikkapa keksimällä esimerkit parista joukon U alkiosta.)

19. * $U = \{\, [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2^2 \,\}$

20. * $U = \{\, [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 + x_2 \,\}$

21. * $U = \{\, [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1 \text{ tai } x_3 = x_2 \,\}$.

22. Onko tehtävän 8 taso ℓ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?

23. Onko tehtävän 12 taso T vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus?

24. Jatkoa edellisiin tehtäviin. Jos suora ℓ oli aliavaruus, anna esimerkki joistakin vektoreista, jotka virittävät kyseisen aliavaruuden. (Ks. s. 39–40.) Tee sama tason T tapauksessa.

Olkoot $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ja $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

25. Matriisi A on vektori kaikkien 2×2-matriisien muodostamassa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori?

26. * Mitkä ovat vektorit $\frac{1}{2}A$ ja $-A$?

27. * Millaisen aliavaruuden vektori A virittää? Toisin sanoen, mikä on $\mathrm{span}(A)$?

28. Anna esimerkki vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruudesta, johon B kuuluu ja C ei kuulu.

29. * Jos vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruuteen kuuluvat sekä B että C, täytyykö siihen tällöin kuulua myös ykkösmatriisi I?

30. * Ratkaise MATLAB-tehtävä sivulla:
`https://wiki.helsinki.fi/display/mathstatKurssienLisasivut/Linis+MATLAB`
Pelkkä vastaus riittää. Linkki löytyy myös kurssin kotisivulta.