Linjär algebra och matrisräkning I
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 3

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 26.9 klo 18.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 30.9. klo 17.00.

Centralt för dessa uppgifter är

- Definiering av inversen
- Elementära matriser
- Homogena ekvationssystem

Du behöver inte upprepa själva problemet på svarspappret om uppgiften inte kräver det.

1. Omvandla matrisen
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
till trappstegsform. (Du behöver inte bry dig om linjerna i matrisen. De bara skiljer två delar av matrisen från varandra. Detta kommer att visa sig ändamålsenligt senare.)

2. Fortsätt föregående uppgift och omvandla trappstegsmatrisen till den så kallade reducerade trappstegsformen (se definitionen i 1.5.1 och Gauss–Jordaneliminering).

3. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Undersök om matrisen A är inverterbar. I fall den är det, bestäm dess invers A^{-1}. (Använd dig av föregående uppgift och kompendiets algoritm 1.6.7.)

4. Låt $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Undersök om matrisen B är inverterbar. I fall den är det, bestäm dess invers.

I uppgifterna 5–8 undersöks matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Bestäm inversen för C.

6. Gör upp en tabell där du räknar upp alla elementära radoperationer du använt samt de elementära matriser som de motsvarar.

7. Vi antar att de elementära matriserna du använt är (i den ordning du använt dem) $E_1, \ldots, E_k$. Beräkna produkten $E_k \cdots E_1 C$.

8. Hur kan du använda dig av föregående uppgift för att bestämma inversen C^{-1}?

I uppgifterna 9–13 undersöker vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 5. \end{cases}$$

9. Kontrollera att

$$\begin{cases} x_1 &= 5 \\ x_2 &= 8 \\ x_3 &= -7 \end{cases}$$

är en lösning till ekvationssystemet.

10. Bestäm det homogena ekvationssystemet som motsvarar ekvationssystemet i föregående uppgift (se sida 22 (i finska kompendiet)).

11. Lös det homogena ekvationssystemet i föregående uppgift med Gauss- eller Gauss-Jordaneliminering.

12. Bestäm lösningen på det ursprungliga ekvationssystemet med hjälp av de resultat som fåtts i uppgifterna 9 och 11 (se övning 2, uppgifter 26 och 27 eller sats 1.5.13.).

13. Genom Gausseliminering får vi följande lösning till det ursprungliga ekvationssystemet:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{där} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Jämför detta resultat med resultatet i föregående uppgift. Är resultaten de samma?

14. Din vän har bevisat följande resultat i linjär algebra:

> Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ och $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Visa, att om matrisen A är inverterbar, så har ekvationen $AX = B$ exakt en lösning.

Beviset såg ut så här:

$$\begin{aligned}
&AX = B\\
&A^{-1}AX = A^{-1}B\\
&X = A^{-1}B\\
\\
&A(A^{-1}B) = B \quad \text{OK!}
\end{aligned}$$

Det är ganska svårt att läsa beviset. Skriv det på nytt och fyll i alla detaljer. Kom ihåg att börja med att skriva upp alla antaganden. I ett bra bevis räcker det inte med att räkna upp matematiska uttryck, utan de skall kompletteras med ord, implikationspilar ($\Rightarrow$) och annat som gör beviset läsbart.

I uppgifterna 15 och 16 undersöker vi en mängd vars element är matriser

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; : \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

15. Visa, att alla summor av element i S tillhör mängden S. Med andra ord, om $A, B \in S$, så är $A + B \in S$. Kom ihåg att skriva ditt bevis noggrant med alla antaganden uppräknade.

16. Fortsättning till föregående uppgift. Visa, att för alla $A \in S$ och $r \in \mathbb{R}$ gäller $rA \in S$. Kom ihåg att skriva ditt bevis noggrant med alla antaganden uppräknade.

I uppgifterna 17–19 undersöker vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= b \end{cases}.$$

17. Bestäm den kompletterade matrisen som motsvarar ekvationssystemet och omvandla den till trappstegsform.

18. Bestäm de reella tal a, för vilka ekvationssystemet har endast en lösning.

19. När har ekvationssystemet inte en entydig lösning? Bestäm de tal $b \in \mathbb{R}$, för vilka ekvationssystemet i uppgiften har en lösning. Vilken är denna lösning?