

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 26.9 klo 18.00.
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 30.9. klo 17.00.

Näiden laskuharjoitusten keskeisiä asioita ovat

- Käänteismatriisin määrittäminen
- Alkeismatriisit
- Homogeeniset yhtälöryhmät

Tehtävänantoja ei tarvitse kirjoittaa ratkaisuihin ellei tehtävän ratkaiseminen sitä erityisesti vaadi.

1. Muuta matriisi

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

porrasmuotoon. (Matriisissa olevista viivoista ei tarvitse välittää. Ne vain erottavat toisistaan matriisin kaksi eri osaa. Tästä tulee olemaan hyötyä myöhemmin.)

2. Jatka edellistä tehtävää ja muuta saamasi porrasmatriisi alkeisrivitoimitusten avulla niin kutsuttuun redusoituun porrasmuotoon. (Ks. määritelmä 1.5.1 ja lause 1.5.5.)

3. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Tutki, onko matriisi A kääntyvä. Myönteisessä

tapauksessa määritä sen käänteismatriisi A^{-1} . (Käytä hyväksesi edellistä tehtävää ja luentomateriaalin laskumenetelmää 1.6.7.)

4. Olkoon $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Tutki, onko matriisi B kääntyvä. Myönteisessä tapauksessa määritä sen käänteismatriisi.

Tehtävissä 5–8 tutkitaan matriisiä

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

5. Etsi matriisin C käänteismatriisi.
6. Laadi taulukko, johon listaat järjestyksessä kaikki edellä käyttämäsi alkeisrivitoimitukset sekä niitä vastaavat alkeismatriisit. (Ks. määritelmä 1.6.1, lemma 1.6.2 ja harjoituksen 2 tehtävät 1–6.)
7. Oletetaan, että löytämäsi alkeismatriisit ovat (siinä järjestyksessä kuin niitä käytit) E_1, \dots, E_k . Laske tulo $E_k \cdots E_1 C$.
8. Miten voit edellisen tehtävän alkeismatriisien avulla muodostaa käänteismatriisin C^{-1} ?

Tehtävissä 9–13 tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

9. Tarkista, että

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 8 \\ x_3 = -7 \end{cases}$$

on yhtälöparin eräs ratkaisu.

10. Määritä yhtälöparia vastaava homogeeninen yhtälöpari. (Ks. sivu 22.)
11. Ratkaise tehtävän edellisessä tehtävässä löydetty homogeeninen yhtälöpari Gaussin tai Gaussin–Jordanin menetelmällä
12. Muodosta alkuperäisen yhtälöparin ratkaisu tehtävissä 9 ja 11 hankittujen ratkaisujen avulla. (Ks. harjoituksen 2 tehtävät 26 ja 27 tai lause 1.5.13.)
13. Gaussin eliminointimenetelmällä saadaan alkuperäisen yhtälöparin ratkaisuksi

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{9}{7} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{missä } s \in \mathbb{R}.$$

Vertaa tätä tulosta edellisen tehtävän tulokseen. Ovatko ne samat?

14. Kaverisi todisti seuraavan lineaarialgebran tuloksen:

Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. Osoita, että jos matriisi A on kääntyvä, yhtälöllä $AX = B$ on täsmälleen yksi ratkaisu.

Todistus näytti tältä:

$$\begin{aligned}AX &= B \\A^{-1}AX &= A^{-1}B \\X &= A^{-1}B\end{aligned}$$

$$A(A^{-1}B) = B \quad \text{OK!}$$

Todistusta on melko vaikea lukea. Kirjoita se uudelleen paremmalla tyyllillä. Hyvässä vastauksessa pelkkä lausekkeitten listaaminen ei riitä, vaan niiden välille on kirjoitettava esimerkiksi sanoja, implikaationuolia (\Rightarrow) tai muuta tilanteeseen sopivaa.

Tehtävissä 15 ja 16 tutkitaan matriiseista koostuvaa joukkoa

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

15. Osoita, että kaikkien joukon S alkioiden summat ovat edelleen joukossa S . Toisin sanoen, jos $A, B \in S$, niin $A + B \in S$. Muistaa kirjoittaa todistuksesi huolellisesti.

16. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että kaikilla $A \in S$ ja $r \in \mathbb{R}$ pätee $rA \in S$. Muistaa kirjoittaa todistuksesi huolellisesti.

Tehtävissä 17–19 tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b, \end{cases}$$

missä $a, b \in \mathbb{R}$.

17. Määritä yhtälöryhmää vastaava täydennetty matriisi ja muuta se porrasmuotoon.
18. Määritä ne reaalityluvut a , joilla yhtälöryhmällä on täsmälleen yksi ratkaisu.
19. Milloin yhtälöryhmällä ei ole yksikäsitteistä ratkaisua? Määritä ne luvut $b \in \mathbb{R}$, joilla tehtävän yhtälöryhmällä tällöin on ratkaisu. Mikä tämä ratkaisu on?