Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 19.9 klo 18.00.
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 23.9. klo 17.00.

Näiden laskuharjoitusten keskeisiä asioita ovat

- käänteismatriisi
- matriisien laskusäännöt
- lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen Gaussin eliminointimenetelmällä.

Tehtävänantoja ei tarvitse kirjoittaa ratkaisuihin ellei tehtävän ratkaiseminen sitä erityisesti vaadi.

Määritellään $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$.

1. Olkoon $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Laske $E_1 A$.

2. Mitä matriisilla E_1 kertominen tekee matriisille A? Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

3. Olkoon $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Laske $E_2 A$.

4. Mitä matriisilla E_2 kertominen tekee matriisille A?

5. Olkoon $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Laske $E_3 A$.

6. Mitä matriisilla E_3 kertominen tekee matriisille A?

Samalla tavalla kuin reaaliluvulla on käänteisluku, voi matriisilla olla niin kutsuttu *käänteismatriisi* (ks. määr 1.4.4).

Luvulla nolla ei ole käänteislukua, ja siksi nollalla ei voi jakaa (jakaminenhan on oikeastaan käänteisluvulla kertomista). Tämän vuoksi esimerkiksi yhtälöitä ratkaistaessa on oltava tarkkana ja pidettävä huolta siitä, että ei tule epähuomiossa jakaneeksi nollalla.

Toisin kuin reaaliluvuilla, monilla matriiseilla ei ole käänteismatriisia. Siksi matriiseja käsiteltäessä on oltava varovainen. Matriisilausekkeita ei voi välttämättä muokata samaan tapaan kuin reaalilukulausekkeita.

7. Osoita käänteismatriisin määritelmään nojautuen, että tehtävän 3 matriisin E_2 käänteismatriisi on

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Oletetaan, että matriisit A ja B ovat samankokoisia kääntyviä neliömatriiseja. Osoita, että matriisi AB on kääntyvä ja määritä AB:n käänteismatriisi.

Oletetaan, että A ja B ovat samankokoisia neliömatriiseja. Mitkä tehtävien 9–11 matriiseista ovat samoja kuin matriisi $(A-B)^2$? Muista perustelu tai vastaesimerkki!

9. $A(A-B) - B(A-B)$

10. $A^2 - 2AB + B^2$

11. $A^2 - AB - BA + B^2$

Luentomateriaalin luvussa 1.5 käsitellään porrasmatriiseja sekä lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemista. Tutustu luentomateriiaalin sivuihin 15–22 seuraavien tehtävien avulla.

Tehtävien 12–14 matriisit ovat yhden alkeisrivitoimituksen päässä porrasmuodosta. Mikä alkeisrivitoimitus on kyseessä kussakin tapauksessa? Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

12.

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

13.
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

14.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

15. Muodosta seuraavan yhtälöryhmän täydennetty matriisi:

$$\begin{cases} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3 \end{cases}$$

16. Muuta edellisen tehtävän matriisi porrasmuotoon. Voit pyytää pajaohjaajilta vinkkejä siitä, miten välivaiheet on helppo kirjoittaa ylös.

17. Millainen on edellisessä tehtävässä muodostamaasi porrasmatriisia vastaava yhtälöryhmä?

18. Mitä voit sanoa tehtävissä 15 ja 17 esiintyvien yhtälöryhmien välisestä suhteesta?

Alla olevissa tehtävissä yhtälöryhmän täydennetty matriisi on saatu Gaussin eliminointimenetelmällä seuraavaan muotoon. Mitkä ovat yhtälöryhmien ratkaisut?

19.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

20.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

21.
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

22.
$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

23. Ratkaise Gaussin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

24. Kemiallista reaktiota kuvaavat yhtälöt pitää tasapainottaa niin, että niissä on kummallakin puolella sama määrä kunkin alkuaineen atomeja. Määritä seuraavassa reaktiossa kertoimet x_1, x_2, x_3 ja x_4, joiksi etsitään mahdollisimman pienet positiiviset kokonaisluvut:

$$x_1 NO_2 + x_2 H_2 O \to x_3 NO + x_4 HNO_3.$$

25. Olkoot $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ reaalilukuja. Oletetaan, että c on nollasta poikkeava reaaliluku. Osoita, että yhtälöryhmät

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ ca_{21}x_1 + ca_{22}x_2 = cb_2 \end{cases}$$

ovat ekvivalentit.

Neuvo: Yhtälöryhmät ovat ekvivalentit, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut. Oleta ensin, että $(x_1, x_2) = (r_1, r_2)$ on ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisu, ja osoita, että se on myös toisen yhtälöryhmän ratkaisu. Tee sitten sama toisin päin.

Olkoot $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ja $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$. Oletetaan, että R on matriisiyhtälön $AX = B$ ratkaisu ja S on matriisiyhtälön $AX = \mathbf{0}$ ratkaisu.

26. Osoita, että myös $R + S$ on yhtälön $AX = B$ ratkaisu.

27. Oletetaan, että myös R' on yhtälön $AX = B$ ratkaisu. Osoita, että R' voidaan kirjoittaa muodossa $R' = R + T$, missä T on yhtälön $AX = \mathbf{0}$ ratkaisu.

Neuvo: Huomaa, että $R' = R + (R' - R)$.

Edellä tulit osoittaneeksi, että yhtälön $AX = B$ ratkaisut riippuvat yhtälön $AX = \mathbf{0}$ ratkaisuista.