Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2011
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: ma 12.9 klo 18.00.
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 16.9. klo 17.00.

Tehtävänantoja ei tarvitse kirjoittaa ratkaisuihin.

Aloitamme kurssin käsittelemällä yhtälöiden ratkaisemista. Yhtälö voidaan usein ratkaistaan johtamalla siitä uusia yhtälöitä, jotka on helpompi ratkaista. Uusi yhtälö muodostetaan vanhasta siten, että kaikki vanhan yhtälön ratkaisut ovat myös uuden yhtälön ratkaisuja. Tällöin voi kuitenkin käydä niin, että lopuksi saatavalla yhtälöllä on sellaisia ratkaisuja, joita alkuperäisellä yhtälöllä ei ollut. Lopuksi saadut ratkaisut onkin sijoitettava alkuperäiseen yhtälöön, jotta saadaan selville alkuperäisen yhtälön ratkaisut.

Yhtälöt ovat keskenään *ekvivalentit*, jos niillä on täsmälleen samat ratkaisut. Toisinaan yhtälö voidaan ratkaista myös niin, että muodostetaan siitä uusia ekvivalentteja yhtälöitä, jotka on helpompi ratkaista. Koska kaikki listatut yhtälöt ovat ekvivalentteja, ovat viimeisen yhtälön ratkaisut täsmällen samat kuin alkuperäisen yhtälön.

Sopivien ekvivalenttien yhtälöiden löytäminen voi kuitenkin olla vaikeaa ja lisäksi yhtälönratkaisusta saattaa tulla monimutkaista, jos joka välissä täytyy tarkistaa, että yhtälöt varmasti ovat ekvivalentit. Siksi ensimmäinen metodi, jossa ratkaisut tarkistetaan lopuksi, on käytännössä varmempi ja mukavampi. Ylipäätään tulosten tarkistaminen on hyvä tapa huolimattomuusvirheiden karsimiseksi!

Monet yhtälönratkaisumenetelmät perustuvat sopivien ekvivalenttien yhtälöiden löytämiseen. Myöhemmmin tällä kurssilla tulemme tutustumaan menetelmään, jolla voidaan ratkoa niin kutsuttuja lineaarisia yhtälöryhmiä.

Tehtävät 1–3 eivät varsinaisesti kuulu lineaarialgebran aihepiiriin, sillä kaikki niissä esiintyvät yhtälöt eivät ole lineaarisia (ks. luentomateriaalin luku 1.1). Tehtävät kuitenkin valaisevat yhtälöiden ratkaisemiseen liittyviä käsitteitä ja ilmiöitä.

1. Ratkaise yhtälö $\sqrt{x+2} = -x$. (Vihje: Korota molemmat puolet toiseen potenssiin. Muista tarkistaa saamasi ratkaisut.)

2. Ovatko yhtälöt $\sqrt{x+2} = -x$ ja $x = -1$ ekvivalentit eli onko niillä samat ratkaisut?

3. Ovatko yhtälöt $\sqrt{x+2} = -x$ ja $x + 2 = x^2$ ekvivalentit?

4. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ 2x + y = -3. \end{cases}$$

5. Edellisen tehtävän yhtälöt ovat suorien yhtälöitä. Piirrä kuva kyseisistä suorista. Miten voit kuvan avulla selittää saamasi ratkaisun?

6. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} -2x + 6y = -1 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

7. Edellisen tehtävän yhtälöt ovat suorien yhtälöitä. Piirrä kuva kyseisistä suorista. Miten voit kuvan avulla selittää saamasi ratkaisun?

8. Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6. \end{cases}$$

9. Edellisen tehtävän yhtälöt ovat suorien yhtälöitä. Piirrä kuva kyseisistä suorista. Miten voit kuvan avulla selittää saamasi ratkaisun?

Luentomateriaalin luvussa 1.2 käsitellään luvuista koottuja taulukkoja, joita kutsutaan *matriiseiksi*. Nämä taulukot ovat hyödyllisiä muun muassa lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemisessa. Myöhemmin tulemme näkemään, että matriiseilla on myös monia muita tärkeitä käyttötarkoituksia. Seuraavissa tehtävissä alamme vähitellen kehittää matriisien teoriaa.

Matriiseja voidaan laskea yhteen ja kertoa keskenään. Näille laskutoimituksille pätevät monet samanlaiset laskukaavat kuin vaikkapa reaalilukujen laskutoimituksille. Matriisien laskutoimitukset sekä transpoosi on määritelty luentomateriaalin luvussa 1.2.

10. Muodosta seuraavan yhtälöryhmän kerroinmatriisi:
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Pelkkä vastaus riittää ratkaisuksi.

Määritellään

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Laske tehtävissä 11–17 ne matriisit, jotka ovat määriteltyjä. Jos matriisi ei ole määritelty, kerro miksi niin on.

11. $A + C$

12. $C - B$

13. $3A$

14. CA

15. AC

16. A^2

17. B^T

18. Olkoon A tehtävässä 10 löydetty kerroinmatriisi. Määritellään

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Laske matriisitulo AX. Miten yhtälö $AX = B$ liittyy tehtävässä 10 esitettyyn yhtälöön?

19. Määritelllään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Määritä matriisitulo AB.

20. Miltä näyttää tulo BA, kun A ja B ovat kuten edellisessä tehtävässä?

21. Keksi ainakin kaksi tapaa, joilla matriisitulo eroaa reaalilukujen kertolaskusta.

22. Kuvaile omin sanoin, mikä skalaarimatriisi on. Tee se ilman matemaattisia symboleita. (Skalaarimatriisi on määritelty luentomateriaalin luvussa 1.4.)

Selvitä tehtävissä 23–25, mitkä väitteistä ovat tosia ja mitkä epätosia. Muista perustelu tai vastaesimerkki!

23. Jos A^2 on määritelty, niin A on neliömatriisi.

24. Jos AB ja BA ovat määriteltyjä, niin A ja B ovat neliömatriiseja.

25. Jos $AB = B$ ja B ei ole nollamatriisi, niin $A = I$.

26. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ja $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$. Olkoon t reaaliluku. Osoita, että $t(AB) = (tA)B$.

    Neuvo: Mieti, milloin kaksi matriisia ovat samat ja tarkastele matriisien mielivaltaisia alkioita. Muista aloittaa todistus listaamalla oletukset. Todistus alkaa siis vaikkapa sanoilla ”Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ja $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$.”