Linjär algebra och matrisräkning I
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 1

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 12.9 kl. 18.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 16.9. kl. 17.00.

Du behöver inte upprepa själva problemet på svarspappret.

Vi börjar kursen med ekvationslösning. En ekvation kan lösas genom att först omvandla den ursprungliga ekvationen till en annan som är lättare att lösa. Den nya ekvationen formas så att alla rötterna till den ursprungliga ekvationen också är rötter till den nya. Det kan då hända är att den nya ekvationen har rötter som den ursprungliga inte hade. Därför måste rötterna till den nya ekvationen substitueras i den ursprungliga ekvationen för att få reda på om de också satisfierar den ursprungliga ekvationen.

Två ekvationer är sinsemellan ekvivalenta om de har exakt samma rötter. En ekvation kan lösas genom att steg för steg bilda en kedja av nya ekvationer där varje ekvation är ekvivalent med den närmast föregående. Målet är att på detta sätt nå fram till en ekvation som är lätt att lösa. Eftersom alla ekvationer i kedjan är ekvivalenta har de exakt samma rötter. Därför erhåller man på detta sätt rötterna till en ursprungliga ekvationen

Det kan vara svårt att hitta lämpliga ekvivalenta ekvationer och ekvationslösningen kan bli svår om man i varje skede måste kontrollera att ekvationerna är ekvivalenta. Därför är den första metoden där man kontrollerar lösningarna ofta både lättast och bekvämast. Överlag lönar det sig att kontrollera lösningarna för att undvika slarvfel!

Många ekvationslösningsmetoder grundar sig på att hitta ekvivalenta ekvationer. I denna kurs kommer vi att bekanta oss med metoder med vilka vi kan lösa så kallade linjära ekvationssystem. Uppgifterna 1-3 har inte direkt med den linjära algebran att göra för ekvationerna i dem är inte linjära (se kompendiet 1.1). Uppgifterna ger ändå insyn i begrepp och fenomen ur teorin för lösning av ekvationer.

1. Lös ekvationen $\sqrt{x+2} = -x$. (Tips: Kvadrera bägge sidor. Kom ihåg att kontrollera lösningarna.)

2. Är ekvationerna $\sqrt{x+2} = -x$ och $x = -1$ ekvivalenta, dvs. har de samma rötter?

3. Är ekvationerna $\sqrt{x+2} = -x$ ja $x + 2 = x^2$ ekvivalenta?

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x + 3y = -2 \\ 2x + y = -3. \end{cases}$$

5. Ekvationerna i föregående uppgift var ekvationer till linjer. Rita en bild av linjerna. Hur kan du beskriva lösningen med hjälp av bilden?

6. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} -2x + 6y = -1 \\ x - 3y = 1. \end{cases}$$

7. Ekvationerna i föregående uppgift var ekvationer till linjer. Rita en bild av linjerna. Hur kan du beskriva lösningen med hjälp av bilden?

8. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ -4x + 2y = -6. \end{cases}$$

9. Ekvationerna i föregående uppgift var ekvationer till linjer. Rita en bild av linjerna. Hur kan du beskriva lösningen med hjälp av bilden?

I kompendiet 1.2 behandlas tabeller av tal, som kallas *matriser*. Dessa tabeller är nyttiga till exempel då man löser linjära ekvationssystem. Senare kommer vi att märka att matriser också har andra viktiga användningsområdenl. I följande uppgifter börjar vi utveckla teorin för matriser. Matriser kan adderas och multipliceras sinsemellan. Många räkneregler som gäller till exempel för de reella talen, gäller också för dessa räkneoperationer. Räkneoperationerna och begreppet transponering är definierade i kompendiet 1.2.

10. Konstruera koefficientmatrisen till följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2. \end{cases}$$

    Lösningen räcker som svar.

Vi definierar

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Evaluera i uppgifterna 11–17 de matriser som är definierade. Om matrisen inte är definierad, förklara varför.

11. $A + C$

12. $C - B$

13. $3A$

14. CA

15. AC

16. A^2

17. B^T

18. Låt A vara koefficientmatrisen i uppgift 10. Vi definierar

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrisprodukten AX. Vilket samband finns det mellan ekvationen $AX = B$ och ekvationen i uppgift 10?

19. Vi definierar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Beräkna matrismproduktenAB.

20. Hur ser matrismultiplikationen BA ut, när A och B är som i förra uppgiften?

21. Ange åtminstone två egenskaper genom vilka multiplikation av matriser skiljer sig från multiplikation av reella tal.

22. Berätta med egna ord, vad en skalärmatris är. Gör det utan matematiska symboler. (Skalärmatrisen är definierad i kompendiet 1.4.)

Vilka påståenden i uppgifterna 23–25 är sanna och vilka är falska? Motivera varför de sanna är sanna och ge motexempel till de falska.

23. Om A^2 är definierad, så är A en on kvadratisk matris.

24. Om AB och BA är definierade är A och B kvadratiska matriser.

25. Om $AB = B$ och B inte är en nollmatris, så är $A = I$.

26. Vi antar att $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ och att $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$. Låt t vara ett reellt tal. Visa, att $t(AB) = (tA)B$.

    Tips: Fundera över när två matriser är lika och studera godtyckliga element i matriserna. Kom ihåg att börja beviset med att lista antagandena. Beviset börjar till exempel med orden ”Antag att $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ och att $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$.”