Linjär algebra och matrisräkning I
Institutionen för matematik och statistik
Hösten 2011
Övning 2

Sista inlämningsdagen för lösningar: mån 19.9 klo 18.00.
Sista inlämningsdagen för korrigeringar: fre 23.9. klo 17.00.

Centralt för dessa uppgifter är

- inversa matrisen
- räkneregler för matriser
- lösning av linjära ekvationssystem med hjälp av Gausselimination.

Du behöver inte upprepa själva problemet på svarspappret om uppgiften inte kräver det.

Vi definierar $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$.

1. Låt $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna E_1A.
2. Vad händer med matrisen A då man multiplicerar den med matrisen E_1? Endast svaret räcker som lösning.
3. Låt $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna E_2A.
4. Vad händer med matrisen A då man multiplicerar den med matrisen E_2?
5. Låt $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Beräkna E_3A.
6. Vad händer med matrisen A då man multiplicerar den med matrisen E_3?

Precis som ett reellt tal (utom noll) har ett reciprokt (inverst) tal, kan en matris ha en *invers* (se def. 1.4.4).

Talet noll har inte något reciprokt tal, och därför går det inte att dividera med noll (division är egentligen multiplikation med det reciproka talet). Därför skall man vara försiktig när man till exempel löser ekvationer, så att man inte dividerar med noll.

Till skillnad från de reella talen, saknar många matriser invers. Därför skall man vara försiktig när man handskas med matriser för man kan inte alltid manipulera matrisutryck på samma sätt som uttryck med reella tal.

7. Visa genom inversa matrisens definition att inversen för matrisen E_2 i uppgift 3 är
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Antag att matriserna A och B är inverterbara kvadratiska matriser av samma dimension. Visa att matrisen AB är inverterbar ochbestäm den inversa matrisen till AB.

Antag att A och B är kvadratiska matriser av samma storlek. Vilka av matriserna i uppgifterna 9–11 är lika med matrisen $(A-B)^2$? Kom ihåg motivering eller motexempel!

9. $A(A-B) - B(A-B)$

10. $A^2 - 2AB + B^2$

11. $A^2 - AB - BA + B^2$

I kapitel 1.5 i kompendiet behandlas trappstegsmatriser och lösning av linjära ekvationssystem. Bekanta dig med sidorna 15–22 i kompendiet genom följande uppgifter.

Matriserna i uppgifterna 12–14 är kan omvandlas till trappstegsmatriser med en enda elementär radoperation. Ange i varje enskilt fall vilken elementär radoperation det är fråga om? Det räcker att bara ange svaret.

12.
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

13.
$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

14.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

15. Bilda den kompletterade matrisen av ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x_1 & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & & & = & 3 \end{cases}$$

16. Omvandla matrisen i föregående uppgift till en trappstegsmatris. Be handledaren i räknestugan om hjälp med att skriva ut mellanstegen.

17. Hur ser det ekvationssystem ut som svarar mot trappstegsmatrisen i föregående uppgift?

18. Vad kan du säga om relationen mellan ekvationssystemen i uppgift 15 och uppgift 17?

I uppgifterna 19 — 22 presenteras de kompletterade matriserna till olika ekvationssystem. Matriserna har erhållits genom Gausselimination. Bestäm i varje enskilt fall lösningen till ekvationssystemet.

19.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}$$

20.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

21.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

22.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}$$

23. Lös genom Gausseliminering följande ekvationssystem

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 14 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & & & = & 8. \end{cases}$$

24. En kemisk reaktionsformel skall alltid vara balanserad så att det finns lika många atomer av varje grundämne före och efter reaktionen. Bestäm koefficienterna x_1, x_2, x_3 ja x_4 i reaktionen

$$x_1NO_2 + x_2H_2O \to x_3NO + x_4HNO_3$$

som de minsta möjliga positiva heltal som balanserar reaktionen.

25. Låt $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ vara reella tal. Antag att c är ett reellt tal skilt från noll. Visa att ekvationssystemen

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & = & b_2 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & = & b_1 \\ ca_{21}x_1 & + & ca_{22}x_2 & = & cb_2 \end{cases}$$

är ekvivalenta.

Tips: Ekvationssystemen är ekvivalenta om de har exakt samma lösningar. Antag först att $(x_1, x_2) = (r_1, r_2)$ är lösningen till det första ekvationssystemet och visa att det också är lösningen till det andra ekvationssystemet. Gö sedan samma sak i den motsatta riktningen.

Låt $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ och $B \in \mathbb{R}^{m\times 1}$.

Antag att R är en lösning till matrisekvationen $AX = B$ och att S är en lösning till matrisekvationen $AX = \mathbf{0}$.

26. Visa att också $R + S$ är lösning till matrisekvationen $AX = B$.

27. Antag att R' är en lösning till ekvationen $AX = B$. Visa att R' kan skrivas i formen $R' = R + T$, där T är en lösning till $AX = \mathbf{0}$.

Tips: Märk att $R' = R + (R' - R)$.

Ovan bevisade du att lösningarna till ekvationen $AX = B$ beror på lösningarna till ekvationen $AX = \mathbf{0}$.