**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Kurssikoe**
**14.12.2011**
**Ratkaisuehdotus**

1. a) Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^4$ vektoreita

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Ovatko vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ kohtisuorassa toisiaan vastaan? Määritä normi $\|\bar{w}\|$ ja projektio $\mathrm{proj}_{\bar{w}}\bar{v}$.

b) Olkoon $V$ sisätuloavaruus. Oletetaan, että $\bar{a}, \bar{b} \in V$,

$$\|\bar{a}\| = 3, \quad \|\bar{b}\| = -2 \quad \text{ja} \quad \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 6.$$

Määritä $\|\bar{a} + \bar{b}\|$.

*Ratkaisuehdotus:*

a) Vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos ja vain jos niiden välinen sisätulo on nolla. Koska

$$\bar{v} \cdot \bar{w} = 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 1(-4) + 4 \cdot 4 = 12,$$

eivät vektorit ole kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Vektorin $\bar{w}$ normi on $\|\bar{w}\| = \sqrt{\bar{w} \cdot \bar{w}} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$.

Määritetään vielä kysytty projektio:

$$\mathrm{proj}_{\bar{w}}\bar{v} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\bar{w} \cdot \bar{w}}\bar{w} = \frac{12}{36}\bar{w} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

b) Tehtävässä oli virhe, sillä normi ei voi olla negatiivinen. Vektorin $\bar{b}$ normin oli tarkoitus olla 2. Ratkaistaan tehtävän oikealla normin arvolla laskemalla ensin sisätulo $\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}\rangle$. Sisätulon ominaisuuksista seuraa, että

$$\begin{aligned}\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}\rangle &= \langle \bar{a}, \bar{a}+\bar{b}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{a}+\bar{b}\rangle\\ &= \langle \bar{a}, \bar{a}\rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{a}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{b}\rangle\\ &= \langle \bar{a}, \bar{a}\rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{b}\rangle\\ &= \langle \bar{a}, \bar{a}\rangle + 2\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \langle \bar{b}, \bar{b}\rangle\\ &= \|\bar{a}\|^2 + 2\langle \bar{a}, \bar{b}\rangle + \|\bar{b}\|^2\\ &= 9+12+4 = 25.\end{aligned}$$

Nyt $\|\bar{a}+\bar{b}\| = \sqrt{\langle \bar{a}+\bar{b}, \bar{a}+\bar{b}\rangle} = 5$.

Jos tehtävän oli tehnyt edellä kuvatulla tavalla käyttäen negatiivista normia, sai täydet pisteet. Samoin silloin, jos oli todennut, että normi ei voi olla negatiivinen.

2. a) Osoita, että kuvaus $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad L\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x_1-2x_2\\3x_3\end{bmatrix}$ on lineaarikuvaus.

   b) Määritä kuvauksen $L$ ydin. Päättele tämän avulla, onko kuvaus injektio.

*Ratkaisuehdotus:*

a) Oletetaan, että $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^3$ ja $c \in \mathbb{R}$. Merkitään $\bar{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ ja $\bar{y} = [y_1\ y_2\ y_3]^T$. Nyt

$$\begin{aligned}L(\bar{x}+\bar{y}) = L\left(\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\x_3+y_3\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}x_1+y_1-2(x_2+y_2)\\3(x_3+y_3)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}x_1-2x_2\\3x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}y_1-2y_2\\3y_3\end{bmatrix} = L(\bar{x}) + L(\bar{y})\end{aligned}$$

ja

$$L(c\bar{x}) = L\left(\begin{bmatrix}cx_1\\cx_2\\cx_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}cx_1+-2cx_2\\3cx_3\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}x_1-2x_2\\3x_3\end{bmatrix} = cL(\bar{x}).$$

Siten $L$ on lineaarikuvaus.

b) Alkio $\bar{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T \in \mathbb{R}^3$ on kuvauksen $L$ ytimessä jos ja vain jos $L(\bar{x}) = \bar{0}$. Tämä puolestaan pätee täsmälleen silloin, kun

$$\begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ratkaisut. Näin saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 0 \\ 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

Yhtälöryhmän ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 & = 2t \\ x_2 & = t \\ x_3 & = 0, \end{cases} \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Siten $\mathrm{Ker}(L) = \{t[2\ 1\ 0]^T \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3. Määritä matriisin $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

*Ratkaisuehdotus:*

Matriisin $A$ karakteristinen polynomi on

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 21.$$

Etsitään polynomin nollakohdat:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0 \\ \iff & \lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(-21)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \\ \iff & \lambda = 3 \text{ tai } \lambda = -7. \end{aligned}$$

Ominaisarvoa 3 vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $A\bar{x} = 3\bar{x}$ eli yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 3x_1 \\ 3x_1 - 6x_2 & = 3x_2. \end{cases}$$

Tästä saadaan edelleen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 & = 0 \\ 3x_1 - 9x_2 & = 0, \end{cases}$$

jota vastaava matriisi on

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & | & 0 \\ 3 & -9 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan matriisi redusoituun porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

(Yksityiskohdat on tässä jätetty kirjoittamatta.) Nähdään, että ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 & = 3t \\ x_2 & = t, \end{cases} \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Siten ominaisvektorit ovat muotoa

$$t \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ominaisarvoa $-7$ vastaavat ominaisvektorit saadaan yhtälöstä $A\bar{x} = -7\bar{x}$ eli yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = -7x_1 \\ 3x_1 - 6x_2 & = -7x_2. \end{cases}$$

Tästä saadaan edelleen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 & = 0 \\ 3x_1 + x_2 & = 0, \end{cases}$$

jota vastaava matriisi on

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & | & 0 \\ 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Muutetaan matriisi redusoituun porrasmuotoon:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Nähdään, että ratkaisut ovat

$$\begin{cases} x_1 & = -\frac{1}{3}t \\ x_2 & = t, \end{cases} \qquad \text{missä } t \in \mathbb{R}.$$

Siten ominaisvektorit ovat muotoa

$$t \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{missä } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Oletetaan, että $L\colon V \to V'$ on lineaarikuvaus ja $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n \in V$.

   a) Osoita, että jos joukko $\{L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n)\}$ on vapaa, niin joukko $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ on vapaa.

   b) Näytä, että käänteinen väite ei päde. Jos joukko $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ on vapaa, niin ei joukko $\{L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n)\}$ ei välttämättä ole vapaa.

*Ratkaisuehdotus:*

a) Oletetaan, että $\{L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n)\}$ on vapaa. Olkoot $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sellaisia, että

$$x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_n\bar{v}_n = \bar{0}.$$

Kuvaamalla yhtälön molemmat puolet kuvauksella $L$ saadaan yhtälö

$$L(x_1\bar{v}_1 + \cdots + x_n\bar{v}_n) = L(\bar{0}).$$

Käyttäen lineaarikuvauksen määritelmää ja sitä, että $L(\bar{0}) = \bar{0}$, yhtälö muuttuu muotoon

$$x_1L(\bar{v}_1) + \cdots + x_nL(\bar{v}_n) = \bar{0}.$$

Nyt joukon $\{L(\bar{v}_1), \ldots, L(\bar{v}_n)\}$ vapaudesta seuraa $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Siten joukko $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ on vapaa.

b) Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^2 \to R^2$, $L(\bar{x}) = \bar{0}$. Osoitetaan ensin, että kyseessä on lineaariakuvaus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nyt

$$\begin{aligned} &L(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = L(\bar{v}) + L(\bar{w}) \quad \text{ja} \\ &L(c\bar{v}) = \bar{0} = c \cdot \bar{0} = cL(\bar{v}). \end{aligned}$$

Siten $L$ on lineaarikuvaus.

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ joukko $\{[1\ 0]^T\}$ on vapaa. Lisäksi huomataan, että $L([1\ 0]^T) = \bar{0}$. Siis joukko $\{L([1\ 0]^T)\} = \{\bar{0}\}$ ei ole vapaa. Näin ollen väite on todistettu.