4. LINEAARIKUVAUKSET

4.1 Määritelmä ja esimerkkejä

Olkoot V ja V' vektoriavaruuksia. Tarkastellaan kuvausta $L : V \to V'$. Tällöin jokaiseen vektoriin $\mathbf{v} \in V$ liittyy tietty, L:n ja $\mathbf{v}$:n yksikäsitteisesti määräämä *kuvavektori* $L(\mathbf{v}) \in V'$.

Määritelmä 4.1.1. Kuvaus $L : V \to V'$ on *lineaarinen* l. *lineaarikuvaus*, jos

i) $L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, ja

ii) $L(c\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$.

(Kaavoissa vasemmalla on V:n ja oikealla V':n laskutoimitus.)

Lause 4.1.2. *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarikuvaus. Tällöin*

a) $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}$, *ja*

b) $L(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1L(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_kL(\mathbf{v}_k)$, *kun* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$.

Todistus. a) $L(\mathbf{0}_V) \overset{2.2.5\,a)}{=} L(0 \cdot \mathbf{0}_V) \overset{\text{ii}}{=} 0 \cdot L(\mathbf{0}_V) \overset{2.2.5\,a)}{=} \mathbf{0}_{V'}$.
b) seuraa induktiolla 4.1.1:stä: Tapaus $k = 1$ on suoraan 4.1.1 ii). Jos sitten $k \geq 2$ ja tiedetään jo, että

$$L(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}) = c_1L(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_{k-1}L(\mathbf{v}_{k-1})$$

("induktio-oletus"), niin

$$\begin{aligned} &L(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = L(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k-1}v_{k-1}) + L(c_k\mathbf{v}_k) \qquad (4.1.1\text{ i)} \\ &= c_1L(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_{k-1}L(\mathbf{v}_{k-1}) + c_kL(\mathbf{v}_k) \qquad (\text{ind.ol. } + 4.1.1\text{ ii}). \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 4.1.3. (a) Olkoon $A = [\,a_{ij}\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $m \times n$-matriisi. Määritellään kuvaus $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ asettamalla

$$L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

missä $A\mathbf{x}$ on matriisitulo, toisin sanoen

$$L_A : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}, \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (i = 1, \ldots, m).$$

L_A on lineaarinen, sillä matriisitulon ominaisuuksista 1.3.1 seuraa, että

$$L_A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A\mathbf{x}+A\mathbf{y} = L_A(\mathbf{x})+L_A(\mathbf{y}) \quad \text{ja}$$
$$L_A(c\mathbf{x}) = A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} = cL_A(\mathbf{x}),$$

kun $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

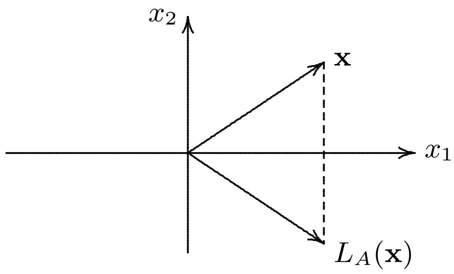
Kohdissa b), c) ja d) on konkreettisia esimerkkejä tapauksesta $m = n = 2$.

(b) $$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad (a \in \mathbb{R}) \implies L_A(\mathbf{x}) = a\mathbf{x} \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on *homotetia*. Jos $a > 1$, L_A on *venytys* (dilataatio); jos $0 < a < 1$, L_A on *kutistus* (kontraktio).

(c) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \implies L_A : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}.$$

$L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on *peilaus* x_1-akselin suhteen.



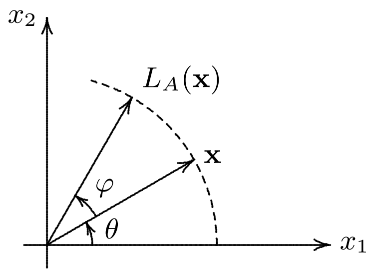
(d)
$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad (\varphi \in \mathbb{R}) \implies L_A : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1\cos\varphi - x_2\sin\varphi \\ x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Esitetään $\mathbf{x} = [\,x_1\ x_2\,]^T \neq \mathbf{0}$ napakoordinaattien avulla:

$x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$, missä $r = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ja $\theta \in \mathbb{R}$ on $\mathbf{x}$:n vaihekulma. Tällöin

$$L_A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} r(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi) \\ r(\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos(\theta+\varphi) \\ r\sin(\theta+\varphi) \end{bmatrix}$$

saadaan *kiertämällä* vektoria $\mathbf{x}$ kulman φ verran origon ympäri.



4.3:ssa nähdään, että jokainen lineaarikuvaus $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on muotoa L_A sopivalla $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Esimerkki 4.1.4. a) $D : C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $D(f) = f' = f$:n derivaatta kaikilla $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on lineaarinen, sillä $(f+g)' = f' + g'$ ja $(cf)' = cf'$ (Diff. I).

b) $I : C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $I(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on myös lineaarinen.

Yleisluontoisia esimerkkejä:

Esimerkki 4.1.5. Olkoot $V, V', \dots$ vektoriavaruuksia.

a) *Identtinen kuvaus* $\mathrm{id}_V : V \to V$, $\mathrm{id}_V(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, on selvästi lineaarinen, samoin aliavaruuden $W \subset V$ *kanoninen injektio* $i_{W,V} : W \to V$, $i_{W,V}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ kaikilla $\mathbf{w} \in W$.

b) *Nollakuvaus* $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{V,V'} : V \to V'$, $\mathbf{0}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{V'}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, on lineaarinen.

c) Jos $L : V \to V'$ ja $L' : V' \to V''$ ovat lineaarisia, niin *yhdistetty kuvaus* $L' \circ L : V \to V''$, $(L' \circ L)(\mathbf{v}) = L'(L(\mathbf{v}))$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, on lineaarinen.

Todistus. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ja $c \in \mathbb{R}$. Silloin

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad (L' \circ L)(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = L'(L(\mathbf{v}+\mathbf{w})) = L'(L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})) \\
&\qquad\qquad = L'(L(\mathbf{v})) + L'(L(\mathbf{w})) = (L' \circ L)(\mathbf{v}) + (L' \circ L)(\mathbf{w}), \\
&\text{(ii)} \quad (L' \circ L)(c\mathbf{v}) = L'(L(c\mathbf{v})) = L'(cL(\mathbf{v})) = cL'(L(\mathbf{v})) = c(L' \circ L)(\mathbf{v}). \quad \square
\end{aligned}
$$

d) Jos $L : V \to V'$ on lineaarinen ja $W \subset V$ aliavaruus, niin L:n *rajoittuma* W:hen $L|W : W \to V'$, $(L|W)(\mathbf{w}) = L(\mathbf{w})$ kaikilla $\mathbf{w} \in W$, on lineaarinen (esimerkiksi koska $L|W = L \circ i_{W,V}$).

e) Jos $L_1, L_2 : V \to V'$ ovat lineaarisia ja $a \in \mathbb{R}$, niin $L_1 + L_2$ ja aL_1 ovat lineaarikuvauksia $V \to V'$, kun määritellään

$$(L_1 + L_2)(\mathbf{v}) = L_1(\mathbf{v}) + L_2(\mathbf{v}) \quad \text{ja} \quad (aL_1)(\mathbf{v}) = aL_1(\mathbf{v}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{v} \in V.$$

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Esimerkki 4.1.6. Olkoon V sisätuloavaruus, sisätulona $\langle\ ,\ \rangle$.

a) Kiinteällä $\mathbf{w} \in V$ on 3.2.2:n nojalla $\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$ lineaarikuvaus $V \to \mathbb{R}$.

b) Olkoon $W \subset V$ äärellisulotteinen aliavaruus. Määritellään kuvaus $p : V \to V$ asettamalla

$$p(\mathbf{v}) = \mathrm{proj}_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\text{:n kohtisuora projektio } W\text{:lle}$$

kaikilla $\mathbf{v} \in V$ (siis $p(\mathbf{v}) \in W \subset V\ \forall \mathbf{v} \in V$). Projektion määritelmän nojalla on $p(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, kun $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$, missä $\mathbf{w} \in W$ ja $\mathbf{w}' \in W^{\perp}$.

Väite. p on lineaarinen.

Todistus. Olkoot $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1'$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2'$, missä $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ ja $\mathbf{w}_1', \mathbf{w}_2' \in W^\perp$. Tällöin $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) + (\mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2')$. Koska W ja $W^\perp$ ovat aliavaruuksia, on $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$ ja $\mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \in W^\perp$, ja siten

$$p(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = p(\mathbf{v}_1) + p(\mathbf{v}_2).$$

Vastaavasti todetaan, että $p(c\mathbf{v}) = cp(\mathbf{v})$, kun $\mathbf{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Seuraava tulos on hyödyllinen tutkittaessa lineaarikuvauksia $V \to V'$, kun V on äärellisulotteinen.

Lause 4.1.7. *Olkoot V ja V' vektoriavaruuksia, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ V:n kanta (siis V on äärellisulotteinen ja $\dim(V) = n$), ja $\mathbf{v}_1', \dots, \mathbf{v}_n' \in V'$ annettuja vektoreita. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi lineaarikuvaus $L : V \to V'$, jolla*

$$L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1', \dots, L(\mathbf{v}_n) = \mathbf{v}_n'.$$

Todistus. Enintään yksi. Olkoot $L_1, L_2 : V \to V'$ kaksi lineaarikuvausta, joilla $L_1(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j' = L_2(\mathbf{v}_j)$, $j = 1, \dots, n$. Olkoon $\mathbf{v} \in V = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$. Silloin $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ eräillä $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, joten

$$\begin{aligned} L_1(\mathbf{v}) &= L_1(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) \overset{4.1.2.b}{=} x_1L_1(\mathbf{v}_1) + \dots + x_nL_1(\mathbf{v}_n) \\ &= x_1L_2(\mathbf{v}_1) + \dots + x_nL_2(\mathbf{v}_n) \overset{4.1.2.b}{=} L_2(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = L_2(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

Koska siis $L_1(\mathbf{v}) = L_2(\mathbf{v})$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$, on $L_1 = L_2$

b) *Ainakin yksi.* Olkoon $\mathbf{v} \in V$. Tällöin $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ eräillä $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, ja nämä kertoimet ($\mathbf{v}$:n koordinaatit kannassa $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$; ks. kappaleen 2.8 alku) ovat $\mathbf{v}$:n yksikäsitteisesti määräämät. Voidaan siis määritellä kuvaus $L : V \to V'$ asettamalla $L(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{v}_1' + \dots + x_n\mathbf{v}_n'$, kun $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Silloin $L(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_j'$ kaikilla $j \in \{1, \dots, n\}$, joten jää todistettavaksi

Väite. L on lineaarinen.

Todistus. Olkoon $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n$ ja $\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + \dots + y_n\mathbf{v}_n$, missä $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$, ja olkoon $c \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n \quad \text{ja} \\ c\mathbf{v} &= (cx_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (cx_n)\mathbf{v}_n, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1' + \dots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n' \\ &= (x_1\mathbf{v}_1' + \dots + x_n\mathbf{v}_n') + (y_1\mathbf{v}_1' + \dots + y_n\mathbf{v}_n') = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w}), \\ L(c\mathbf{v}) &= (cx_1)\mathbf{v}_1' + \dots + (cx_n)\mathbf{v}_n' = c(x_1\mathbf{v}_1' + \dots + x_n\mathbf{v}_n') = cL(\mathbf{v}). \quad \square \end{aligned}$$

4.2 Kuva ja ydin. Isomorfismit

Olkoot V ja V' vektoriavaruuksia ja $L : V \to V'$ lineaarikuvaus. Määritellään L:n *kuva* $\mathrm{Im}(L) = L(V)$ ja *ydin* $\mathrm{Ker}(L)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(L) &= L(V) = \{L(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \\ &= \{\mathbf{v}' \in V' \mid \mathbf{v}' = L(\mathbf{v}) \text{ jollakin } \mathbf{v} \in V\} \subset V', \\ \mathrm{Ker}(L) &= \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{V'}\} \subset V,\end{aligned}$$

Lause 4.2.1. $\mathrm{Im}(L)$ *on* V'*:n aliavaruus ja* $\mathrm{Ker}(L)$ *on* V*:n aliavaruus.*

Todistus. Kuva. i) Olkoot $\mathbf{v}', \mathbf{w}' \in \mathrm{Im}(L)$. Silloin $\mathbf{v}' = L(\mathbf{v})$ ja $\mathbf{w}' = L(\mathbf{w})$ eräillä $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, ja

$$\mathbf{v}' + \mathbf{w}' = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w}) \overset{4.1.1.i}{=} L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in \mathrm{Im}(L),$$

koska $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.

ii) Olkoon $\mathbf{v}' \in \mathrm{Im}(L)$ ja $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$. Silloin $\mathbf{v}' = L(\mathbf{v})$ eräällä $\mathbf{v} \in V$; nyt

$$c\mathbf{v}' = cL(\mathbf{v}) \overset{4.1.1.ii}{=} L(c\mathbf{v}) \in \mathrm{Im}(L),$$

koska $c\mathbf{v} \in V$.

iii) Lauseen 4.1.2.a) nojalla $\mathbf{0}_{V'} = L(\mathbf{0}_V) \in \mathrm{Im}(L)$.

Ydin. i) Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(L)$. Silloin $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{V'} = L(\mathbf{w})$. Siis

$$L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_{V'} + \mathbf{0}_{V'} = \mathbf{0}_{V'},$$

joten $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(L)$.

ii) Olkoon $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(L)$ ja $c \in \mathbb{R}$. Silloin $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{V'}$. Siis

$$L(c\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v}) = c\mathbf{0}_{V'} = \mathbf{0}_{V'},$$

joten $c\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(L)$.

iii) $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}(L)$, koska $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_{V'}$. $\square$

Huomautus 4.2.2. Yleisemmin, jos $W \subset V$ on aliavaruus, niin W:n *kuva*

$$L(W) = \{L(\mathbf{w}) \mid \mathbf{w} \in W\} = \{\mathbf{v}' \in V' \mid \mathbf{v}' = L(\mathbf{w}) \text{ jollakin } \mathbf{w} \in W\}$$

on V':n aliavaruus (sillä $L(W) = \mathrm{Im}(L|W)$).

Lause 4.2.3. *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarinen ja $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Tällöin*

$$L(\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)) = \mathrm{span}(L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_k)).$$

Todistus. $L(\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k))$:n alkiot ovat

$$L(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k) = x_1L(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_kL(\mathbf{v}_k), \quad x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R},$$

eli samat kuin $\mathrm{span}(L(\mathbf{v}_1), \ldots, L(\mathbf{v}_k))$:n alkiot. $\square$

Esimerkki 4.2.4. Olkoon $A = [\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_n\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $m \times n$-matriisi, jonka sarakkeet ovat $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$, ja $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaavan $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ määrittelemä lineaarikuvaus (ks. 4.1.3). Tällöin

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(L_A) = L_A(\mathbb{R}^n) = L_A(\mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)) &\overset{4.2.3}{=} \mathrm{span}(L_A(\mathbf{e}_1), \ldots, L_A(\mathbf{e}_n)) \\ = \mathrm{span}(A\mathbf{e}_1, \ldots, A\mathbf{e}_n) &= \mathrm{span}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathrm{Col}(A)\end{aligned}$$

on A:n sarakeavaruus, ja

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid L_A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathrm{Null}(A)$$

on A:n nolla-avaruus eli homogeenisen yhtälöryhmän $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ratkaisujen joukko.

Lineaarikuvauksella $L : V \to V'$ avaruuksien $\mathrm{Im}(L)$ ja $\mathrm{Ker}(L)$ "koko" riippuvat toisistaan seuraavasti (kun $\dim(V) < \infty$):

Lause 4.2.5. *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarinen ja V äärellisulotteinen. Tällöin $\mathrm{Im}(L)$ on äärellisulotteinen ja*

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)).$$

Todistus. Lauseen 2.5.12 mukaan $\mathrm{Ker}(L)$ on äärellisulotteinen. Olkoon $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ $\mathrm{Ker}(L)$:n kanta. Täydennetään se V:n kannaksi $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q)$ (2.5.11 a). Silloin $p = \dim(\mathrm{Ker}(L))$, $p + q = \dim(V)$, ja on osoitettava, että $q = \dim(\mathrm{Im}(L))$.

Väite. $(L(\mathbf{w}_1), \ldots, L(\mathbf{w}_q))$ on $\mathrm{Im}(L)$:n kanta.

Todistus. *Viritys*: Lauseen 4.2.3 mukaan

$$\mathrm{Im}(L) = \mathrm{span}(\underbrace{L(\mathbf{v}_1)}_{=\mathbf{0}}, \ldots, \underbrace{L(\mathbf{v}_p)}_{=\mathbf{0}}, L(\mathbf{w}_1), \ldots, L(\mathbf{w}_q)) = \mathrm{span}(L(\mathbf{w}_1), \ldots, L(\mathbf{w}_q)).$$

Vapaus: Olkoot $x_1, \ldots, x_q \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\begin{aligned}&x_1L(\mathbf{w}_1) + \cdots + x_qL(\mathbf{w}_q) = \mathbf{0} \\ &\Longrightarrow L(x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_q\mathbf{w}_q) = \mathbf{0} \\ &\Longrightarrow x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_q\mathbf{w}_q \in \mathrm{Ker}(L) \\ &\Longrightarrow x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_q\mathbf{w}_q = y_1\mathbf{v}_1 + \cdots + y_p\mathbf{v}_p \quad \text{eräillä } y_1, \ldots, y_p \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow -y_1\mathbf{v}_1 - \cdots - y_p\mathbf{v}_p + x_1\mathbf{w}_1 + \cdots + x_q\mathbf{w}_q = \mathbf{0};\end{aligned}$$

koska $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q)$ on vapaa, tästä seuraa, että $x_1 = \cdots = x_q = 0$ $(= y_1 = \cdots = y_p)$. $\square$

Esimerkki 4.2.6. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3,\ \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}.$$

Määritettävä $\dim(\mathrm{Ker}(L_A))$ ja $\dim(\mathrm{Im}(L_A))$.

Ratkaisu. Muunnetaan A alkeisrivitoimituksilla porrasmatriisiksi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 \end{bmatrix}.$$

Siispä

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Null}(A) \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 2x_4 = 0 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + \frac{5}{4}x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_4 = \frac{3}{2}t \\ x_2 = -x_3 - x_4 = \frac{1}{4}t \\ x_3 = -\frac{5}{4}x_4 = -\frac{5}{4}t \\ x_4 = t \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \mathbf{x} = t \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Näin ollen $\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{span}([\,\frac{3}{2}\ \frac{1}{4}\ -\frac{5}{4}\ 1\,]^T)$, joten $\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 1$. Lauseen 4.2.5 mukaan $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 3$, joten $\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$.

(Kuvan $\mathrm{Im}(L_A)$ dimensio saadaan tietysti myös menetelmällä 2.6.1, jonka mukaan A:n sarakkeet 1, 2 ja 3 muodostavat avaruuden $\mathrm{Im}(L_A) = \mathrm{Col}(A)$ kannan; siis $\dim(\mathrm{Im}(L_A)) = 3$). $\square$

Injektiot, surjektiot ja bijektiot (joukko-oppia).

Olkoot X ja Y joukkoja ja $f : X \to Y$ kuvaus. Tällöin f on

(1) *surjektio*, jos $f(X) = Y$, ts. jokaisella $y \in Y$ yhtälöllä $f(x) = y$ on ainakin yksi ratkaisu $x \in X$;

(2) *injektio*, jos $f(x) = f(x')$ vain, kun $x = x'$ $(x, x' \in X)$, ts. jokaisella $y \in Y$ yhtälöllä $f(x) = y$ on korkeintaan yksi ratkaisu $x \in X$;

(3) *bijektio*, jos se on injektio ja surjektio, ts. jokaisella $y \in Y$ yhtälöllä $f(x) = y$ on täsmälleen yksi ratkaisu $x \in X$.

Lause (ja määritelmä) 4.2.7. *Olkoon f kuvaus $X \to Y$. Tällöin f on bijektio $\iff$ on olemassa kuvaus $g : Y \to X$, jolla $g \circ f = \mathrm{id_X}$ ja $f \circ g = \mathrm{id_Y}$. Tällöin g on yksikäsitteisesti määrätty, bijektion f* käänteiskuvaus, *ja sitä merkitään $g = f^{-1}$.*

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Olkoon f bijektio. Kun $y \in Y$, olkoon $x = g(y) \in X$ yhtälön $f(x) = y$ yksikäsitteinen ratkaisu. Näin saadaan kuvaus $g : Y \to X$, jolla $f(g(y)) = y$ eli $(f \circ g)(y) = \mathrm{id_Y}(y)\ \forall y \in Y$; siis $f \circ g = \mathrm{id_Y}$. Yhtälön $f(x) = y$ ratkaisun x yksikäsitteisyydestä seuraa, että g on ainoa kuvaus $Y \to X$, jolla $f \circ g = \mathrm{id_Y}$. Kun $x \in X$, on toisaalta

$$f((g \circ f)(x)) = (f \circ (g \circ f))(x) = ((f \circ g) \circ f)(x) = (\mathrm{id_Y} \circ f)(x) = \mathrm{id_Y}(f(x)) = f(x);$$

koska f on injektio, on $(g \circ f)(x) = x = \mathrm{id_X}(x)$. Siten $g \circ f = \mathrm{id_X}$.

" $\Longleftarrow$ ". Olkoon $g : Y \to X$ sellainen kuvaus, että $g \circ f = \mathrm{id_X}$ ja $f \circ g = \mathrm{id_Y}$. Jos $x, x' \in X$ ja $f(x) = f(x')$, on

$$x = \mathrm{id_X}(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = (g \circ f)(x') = \mathrm{id_X}(x') = x';$$

siis f on injektio. Toisaalta, jos $y \in Y$, niin $g(y) \in X$ ja

$$y = \mathrm{id_Y}(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y));$$

siis f on surjektio. $\square$

Lineaarikuvauksen injektiivisyys ja surjektiivisuus.

Lause 4.2.8. *Lineaarikuvaus $L : V \to V'$ on injektio $\iff$* $\mathrm{Ker}(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Olkoon L injektio. Joka tapauksessa $\mathbf{0}_V \in \mathrm{Ker}(L)$ (Lause 4.2.1). Jos toisaalta $\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(L)$, niin $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{V'} = L(\mathbf{0}_V)$; koska L on injektio, täytyy olla $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$. Näin ollen $\mathrm{Ker}(L) = \{\mathbf{0}_V\}$.

" $\Longleftarrow$ ". Olkoon $\mathrm{Ker}(L) = \{\mathbf{0}_V\}$. Olkoot $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sellaisia, että $L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{w})$. Osoitetaan, että $\mathbf{v} = \mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{w}) &\Longrightarrow L(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_{V'} \\ &\Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathrm{Ker}(L) = \{\mathbf{0}_V\} \Longrightarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}_V \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}. \quad \square \end{aligned}$$

Esimerkki 4.2.9. a) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ja $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} &L_A \text{ on injektio} \iff \mathrm{Ker}(L_A) = \{\mathbf{0}\} \iff \mathrm{Null}(A) = \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \text{homogeenisella yhtälöryhmällä } A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ on vain triviaali ratkaisu } \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Toisaalta

$$L_A \text{ on surjektio} \iff \mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^m \iff \mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m.$$

b) Esimerkin 4.2.6 lineaarikuvaus $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ on surjektio ($\mathrm{Im}(L_A) = \mathbb{R}^3$), mutta ei ole injektio ($\dim(\mathrm{Ker}(L_A)) = 1$).

Lemma 4.2.10. *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarikuvaus ja $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$.*

a) *Jos L on injektio ja $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ on vapaa, niin $(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_k))$ on vapaa.*

b) *Jos L on surjektio ja $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ virittää V:n, niin $(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_k))$ virittää V':n.*

Todistus. a) Olkoot $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
&x_1 L(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_k L(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_{V'} \\
&\implies L(x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k) \overset{4.1.2.b}{=} x_1 L(\mathbf{v}_1) + \cdots + x_k L(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_{V'} \\
&\implies x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k \in \mathrm{Ker}(L) = \{\mathbf{0}_V\} \quad (L \text{ injektio}) \\
&\implies x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}_V \implies x_1 = \cdots = x_k = 0 \quad ((\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \text{ vapaa}).
\end{aligned}
$$

b) Lauseen 4.2.3 nojalla on

$$\mathrm{span}(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_k)) = L(\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)) = L(V) = \mathrm{Im}(L).$$

Koska L on surjektio, on $\mathrm{Im}(L) = V'$. Siis V' on vektorien $L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_k)$ virittämä. □

Lineaariset isomorfismit.

Määritelmä 4.2.11. Lineaarikuvaus, joka on bijektio, on *lineaarinen isomorfismi*. Vektoriavaruudet V ja V' ovat *isomorfiset*, jos on olemassa jokin lineaarinen isomorfismi $V \to V'$. Sille, että V ja V' ovat isomorfiset, käytetään merkintää $V \cong V'$.

Lause 4.2.12. *Olkoot V, V' ja V'' vektoriavaruuksia.*

a) $\mathrm{id}_V : V \to V$ *on isomorfismi.*

b) Jos $L : V \to V'$ ja $L' : V' \to V''$ ovat isomorfismeja, niin $L' \circ L : V \to V''$ on isomorfismi.

c) Jos $L : V \to V'$ on isomorfismi, niin $L^{-1} : V' \to V$ on isomorfismi.

Todistus. a) Selvä.

b) Lauseesta 4.1.5 c) seuraa, että $L' \circ L$ on lineaarinen. Lisäksi se on bijektio, käänteiskuvauksena $L^{-1} \circ L'^{-1}$.

c) L^{-1} on bijektio (sen käänteiskuvaus on L), joten jää todistettavaksi, että $L^{-1} : V' \to V$ on lineaarinen.

Olkoot $\mathbf{v}', \mathbf{w}' \in V'$. Tällöin $\mathbf{v}' = L(\mathbf{v})$ ja $\mathbf{w}' = L(\mathbf{w})$, missä $\mathbf{v} = L^{-1}(\mathbf{v}') \in V$ ja $\mathbf{w} = L^{-1}(\mathbf{w}') \in V$. Olkoon lisäksi $c \in \mathbb{R}$. Silloin

$$
\begin{aligned}
L^{-1}(\mathbf{v}' + \mathbf{w}') &= L^{-1}(L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})) \overset{L\text{ lin.}}{=} L^{-1}\big(L(\mathbf{v} + \mathbf{w})\big) \\
&= \mathbf{v} + \mathbf{w} = L^{-1}(\mathbf{v}') + L^{-1}(\mathbf{w}'),
\end{aligned}
$$

$$L^{-1}(c\mathbf{v}') = L^{-1}(cL(v)) \overset{L\text{ lin.}}{=} L^{-1}(L(c\mathbf{v})) = c\mathbf{v} = cL^{-1}(\mathbf{v}'). \quad \square$$

Siis on voimassa

(1) $V \cong V$,

(2) $V \cong V'$ ja $V' \cong V'' \implies V \cong V''$,

(3) $V \cong V' \implies V' \cong V$.

Esimerkki 4.2.13. a) Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ V:n kanta. Tarkastellaan kuvausta

$$C_S : V \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_S \quad \text{(koordinaattivektori } S\text{:n suhteen)}.$$

Lauseesta 2.8.2 seuraa, että C_S on lineaarinen. Koska $[\mathbf{v}_j]_S = \mathbf{e}_j$ (luonnollinen kantavektori), on C_S itse asiassa se yksikäsitteinen lineaarikuvaus $V \to \mathbb{R}^n$, jossa $\mathbf{v}_j \mapsto \mathbf{e}_j$ kaikilla j (ks. 4.1.7). C_S on lineaarinen isomorfismi; sen käänteiskuvaus on se yksikäsitteinen lineaarikuvaus $C'_S : \mathbb{R}^n \to V$, jossa $\mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{v}_j$ kaikilla j. Lineaarikuvauksessa $C'_S \circ C_S : V \to V$ nimittäin $\mathbf{v}_j \mapsto \mathbf{v}_j = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}(\mathbf{v}_j)$ kaikilla j, joten 4.1.7:n nojalla $C'_S \circ C_S = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$, ja vastaavasti $C_S \circ C'_S = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

b) Kaava $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^T$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ määrittelee lineaarisen isomorfismin $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_n$; tämän käänteisisomorfismin antaa kaava $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y}^T$ kaikilla $\mathbf{y} \in \mathbb{R}_n$.

c) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \times n$-matriisi. b)-kohdan isomorfismit $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_m$ ja $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_n$ rajoittuvat isomorfismeiksi

$$\mathrm{Col}(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Row}(A^T), \qquad \mathrm{Col}(A^T) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Row}(A).$$

(A:n sarakkeet $\mapsto$ A^T:n rivit, A^T:n sarakkeet $\mapsto$ A:n rivit.)

Lause 4.2.14. *Olkoon V äärellisulotteinen vektoriavaruus ja V' vektoriavaruus. Tällöin*

$$V \cong V' \iff V' \text{ on äärellisulotteinen ja } \dim(V) = \dim(V').$$

Todistus. "$\implies$". Olkoon $L : V \to V'$ isomorfismi, $\dim(V) = k$ ja $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ V:n kanta. Lemman 4.2.10 mukaan $(L(\mathbf{v}_1), \dots, L(\mathbf{v}_k))$ on vapaa ja virittää V':n, joten se on V':n kanta. Siis V' on äärellisulotteinen ja $\dim(V') = k = \dim(V)$.

"$\impliedby$". Olkoon V' äärellisulotteinen, $\dim(V) = \dim(V') = k$, $S = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ V:n kanta ja $S' = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_k)$ V':n kanta. Esimerkin 4.2.13 a)-kohdan nojalla $C_S : V \to \mathbb{R}^k$ ja $C_{S'} : V' \to \mathbb{R}^k$ ovat isomorfismeja. Silloin lauseen 4.2.12 kohtien b) ja c) nojalla ${C_{S'}}^{-1} \circ C_S : V \to V'$ on isomorfismi. $\square$

Erityisesti $\dim(V) = n \iff V \cong \mathbb{R}^n$. Valitettavasti n-ulotteisella avaruudella V isomorfismi $V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ (esimerkiksi C_S) riippuu V:n kannan valinnasta eikä ole "kanoninen".

Lause 4.2.15. *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarikuvaus, V ja V' äärellisulotteisia vektoriavaruuksia ja* $\dim(V) = \dim(V')$. *Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

i) *L on injektio,*

ii) *L on surjektio,*

iii) *L on bijektio.*

Todistus. Koska selvästi iii) $\Longrightarrow$ i) ja iii) $\Longrightarrow$ ii) sekä i) & ii) $\Longrightarrow$ iii), riittää osoittaa, että i) $\Longleftrightarrow$ ii).

Lauseen 4.2.5 nojalla $\dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(V) = \dim(V')$. Voidaan siis päätellä:

$$\begin{aligned} L \text{ on injektio} &\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(L) = \{\mathbf{0}\} \\ &\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(L)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(V') \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(L) = V' \\ &\Longleftrightarrow L \text{ on surjektio.} \quad \square \end{aligned}$$

Erityisesti, jos V on äärellisulotteinen, niin jokainen lineaarinen injektio (vastaavasti jokainen lineaarinen surjektio) $V \to V$ on isomorfismi. Tämä ei pidä paikkaansa, jos V ei ole äärellisulotteinen:

Esimerkki 4.2.16. Tarkastellaan avaruutta $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (ks. 2.2.3.b), jonka alkiot ovat kaikki kuvaukset $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Avaruuden $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:n alkiot f voidaan tulkita lukujonoiksi $(x_0, x_1, x_2, \dots)$, missä $x_i = f(i) \in \mathbb{R}$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Nyt

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_2, \dots)$$

on lineaarinen injektio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, mutta ei surjektio (mikään jono ei kuvaudu esimerkiksi jonoksi $(1, 1, 1, \dots)$); vastaavasti

$$(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, \dots)$$

on lineaarinen surjektio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, mutta ei injektio (esimerkiksi $(0, 0, 0, \dots)$ ja $(1, 0, 0, \dots)$ ovat eri jonoja, mutta kuvautuvat samaksi jonoksi $(0, 0, 0, \dots)$).

Huomautus 4.2.17. a) Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $m \times n$-matriisi. Lukujen 3 ja 4 tulosten avulla saadaan uusi todistus perustulokselle $\dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A)$ $(= \mathrm{rank}(A)$; ks. 2.6.3). Esimerkin 4.2.4 ja lauseen 4.2.5 nojalla on

$$\text{(a)} \qquad \dim \mathrm{Null}(A) + \dim \mathrm{Col}(A) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Lauseen 3.4.4 nojalla on

(b) $$\mathrm{Null}(A) = \mathrm{Col}(A^T)^{\perp} \quad (\mathbb{R}^n\text{:ssä}).$$

Kohdan (b) ja lauseen 3.4.5.c) nojalla on

(c) $$\dim \mathrm{Null}(A) + \dim \mathrm{Col}(A^T) = \dim \mathrm{Col}(A^T)^{\perp} + \dim \mathrm{Col}(A^T) = \dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Esimerkin 4.2.13.c) nojalla on

(d) $$\mathrm{Col}(A^T) \cong \mathrm{Row}(A).$$

Yhdistetään yllä olevat tulokset:

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Col}(A) &\overset{\text{(a)}}{=} n - \dim \mathrm{Null}(A) \overset{\text{(c)}}{=} n - (n - \dim \mathrm{Col}(A^T)) \\ &= \dim \mathrm{Col}(A^T) \overset{\text{(d)}}{=} \dim \mathrm{Row}(A). \end{aligned}$$

Lisäksi $\mathrm{rank}(A^T) = \dim \mathrm{Col}(A^T) = \dim \mathrm{Row}(A) = \mathrm{rank}(A)$.

b) Lauseen 4.2.15 avulla on mahdollista todistaa lause 1.6.6 ”geometrisemmalla”, dimensioteoriaan perustuvalla tavalla kuin kappaleessa 1.6.

4.3. Lineaarikuvaukset ja matriisit

Olkoot V ja V' vektoriavaruuksia. Tutkimme joukkoa

$$\mathrm{Lin}(V, V') = \{L \mid L \text{ on lineaarikuvaus } V \to V'\},$$

kun V ja V' ovat äärellisulotteisia. Todistamme, että jos $\dim(V) = n$, $\dim(V') = m$, ja V:lle ja V':lle molemmille valitaan jokin tietty kanta, saadaan kääntäen yksikäsitteinen vastaavuus joukon $\mathrm{Lin}(V, V')$ ja $m \times n$-matriisien joukon $\mathbb{R}^{m\times n}$ välille.

Erikoistapaus $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Esimerkissä 4.1.3 a) liitettiin $m \times n$-matriisiin $A = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lineaarikuvaus $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kaavalla $L_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Lause 4.3.1. *Kuvaus $A \mapsto L_A$ on bijektio $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Lisäksi*

(1) $L_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$,
(2) $L_{A+B} = L_A + L_B \quad (A, B \in \mathbb{R}^{m\times n})$,
(3) $L_{cA} = cL_A \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ c \in \mathbb{R})$, *ja*
(4) $L_{AB} = L_A \circ L_B \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times p})$.

Todistus. Injektio. Oletetaan, että matriiseilla $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on $L_A = L_B$, ts. $L_A(\mathbf{x}) = L_B(\mathbf{x})$ eli $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ kaikilla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Olkoon $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta. Nyt erityisesti $A\mathbf{e}_j = B\mathbf{e}_j$ kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Koska $A\mathbf{e}_j$ on A:n j:s sarake ja $B\mathbf{e}_j$ on B:n j:s sarake, on siis A:n j:s sarake sama kuin B:n j:s sarake kaikilla $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Näin ollen $A = B$.

Surjektio. Olkoon $L \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (ts. $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus). Olkoon

$$A = [\, L(\mathbf{e}_1) \;\ldots\; L(\mathbf{e}_n)\,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

se matriisi, jonka sarakkeet ovat $L(\mathbf{e}_j) \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, \ldots, n$. Tällöin

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= L(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \overset{L \text{ lin.}}{=} x_1 L(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n L(\mathbf{e}_n) \\ &= A\mathbf{x} = L_A(\mathbf{x}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} = [\, x_1 \;\ldots\; x_n\,]^T \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

joten $L = L_A$.

Viimeiset väitteet seuraavat heti matriisien laskusäännöistä. Kun esimerkiksi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ja $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, on

$$\begin{aligned} L_{AB}(\mathbf{x}) &= (AB)\mathbf{x} \overset{1.3.1.d}{=} A(B\mathbf{x}) = L_A(B\mathbf{x}) = L_A(L_B(\mathbf{x})) \\ &= (L_A \circ L_B)(\mathbf{x}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p; \end{aligned}$$

siten $L_{AB} = L_A \circ L_B$. $\square$

Lauseen 4.3.1 avulla tulkitaan tarvittaessa matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lineaarikuvaukseksi $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (samastetaan siis $A = L_A$) ja päinvastoin. Tällöin erityisesti matriisitulo vastaa kuvausten yhdistämistä.

Yleinen tapaus $\mathrm{Lin}(V, V')$**.**

Olkoon $\dim(V) = n$, $\dim(V') = m$, $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ V:n kanta ja $S' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ V':n kanta. Olkoon $L : V \to V'$ lineaarikuvaus. Tarkastellaan kaaviota

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "C_S"', "\sim"] & V' \arrow[d, "C_{S'}", "\sim"'] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "A"] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

missä $C_S : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_S$ ja $C_{S'} : \mathbf{v}' \mapsto [\mathbf{v}']_{S'}$ (ks. 4.2.13 a). Yhdistelmä $C_{S'} \circ L \circ {C_S}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ on lineaarikuvaus, joten lauseen 4.3.1 mukaan on olemassa yksikäsitteinen $m \times n$-matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, jolla

$$C_{S'} \circ L \circ {C_S}^{-1} = A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}.$$

(Tässä on samastettu A ja L_A, kuten edellä sovittiin.)

Määritelmä 4.3.2. Yllä olevassa tilanteessa matriisi $A = M(L; S' \leftarrow S) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ on *lineaarikuvauksen* $L : V \to V'$ *matriisi kantojen* S *ja* S' *suhteen.*

Olkoon $M(L; S' \leftarrow S) = A = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Tällöin yllä oleva kaavio "kommutoi", ts. $C_{S'} \circ L = A \circ C_S$, sillä $A \circ C_S = C_{S'} \circ L \circ {C_S}^{-1} \circ C_S = C_{S'} \circ L$ (koska ${C_S}^{-1} \circ C_S = \mathrm{id}_V$). Siispä

$$(4.3.3) \qquad [\, L(\mathbf{v}) \,]_{S'} = M(L; S' \leftarrow S)\, [\, \mathbf{v} \,]_S \quad \text{kaikilla } \mathbf{v} \in V.$$

Jos $[\mathbf{v}]_S = [\, x_1 \, \dots \, x_n \,]^T$ ja $[L(\mathbf{v})]_{S'} = [\, y_1 \, \dots \, y_m \,]^T$, ts.

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{v}_j \quad \text{ja} \quad L(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{v}'_i,$$

on siis

$$(4.3.4) \qquad y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

Kun 4.3.3:ssa valitaan $\mathbf{v} = \mathbf{v}_j$, jolloin $[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{v}_j]_S = \mathbf{e}_j$ on $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kantavektori, nähdään, että $[L(\mathbf{v}_j)]_{S'} = M(L; S' \leftarrow S)\, [\, \mathbf{v}_j \,]_S = M(L; S' \leftarrow S)\mathbf{e}_j$ on matriisin $M(L; S' \leftarrow S)$ j:s sarake ($j = 1, \dots, n$). Siispä

$$(4.3.5) \qquad L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \mathbf{v}'_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Huomautus 4.3.6. Kun matriisi $M(L; S' \leftarrow S) = [\, a_{ij} \,] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ määritellään kuten 4.3.2:ssa, se siis toteuttaa kaavat 4.3.3, 4.3.4 ja 4.3.5. Kääntäen, mikä tahansa näistä kolmesta kaavasta kelpaa yksinkin matriisin $M(L; S' \leftarrow S) = [\, a_{ij} \,]$ määritelmäksi, sillä niistä seuraa, että ko. matriisin sarakkeet ovat $[L(\mathbf{v}_j)]_{S'}$, $j = 1, 2, \dots, n$, eli päädytään samaan matriisiin kuin 4.3.2:ssa.

Lause 4.3.7. *Kuvaus* $L \mapsto M(L; S' \leftarrow S)$ *on bijektio* $\mathrm{Lin}(V, V') \to \mathbb{R}^{m\times n}$.

Todistus. Käänteiskuvaus $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathrm{Lin}(V, V')$ saadaan kaavalla $A \mapsto {C_{S'}}^{-1} \circ A \circ C_S$, sillä

$$\begin{aligned} M({C_{S'}}^{-1} \circ A \circ C_S; S' \leftarrow S) &= C_{S'} \circ ({C_{S'}}^{-1} \circ A \circ C_S) \circ {C_S}^{-1} \\ &= A, \quad \text{kun } A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \text{ja} \\ {C_{S'}}^{-1} \circ M(L; S' \leftarrow S) \circ C_S &= {C_{S'}}^{-1} \circ (C_{S'} \circ L \circ {C_S}^{-1}) \circ C_S \\ &= L, \quad \text{kun } L \in \mathrm{Lin}(V, V'). \quad \square \end{aligned}$$

Tarkastellaan lopuksi lausetta 4.3.7 erikoistapauksessa, jossa $V = \mathbb{R}^n$ ja $V' = \mathbb{R}^m$. Olkoot E_m ja E_n avaruuksien $\mathbb{R}^m$ ja $\mathbb{R}^n$ luonnolliset kannat. Selvästi 4.3.7:n bijektio $\mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^{m\times n}$, $L \mapsto M(L; E_m \leftarrow E_n)$, on 4.3.1:n bijektion $A \mapsto L_A$ käänteiskuvaus. Kun matriisi $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ samastetaan lineaarikuvauksen $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kanssa, saadaan kaavat

$$A = M(L_A; E_m \leftarrow E_n) = M(A; E_m \leftarrow E_n). \tag{4.3.8}$$

Lineaarikuvauksen matriisin ominaisuuksia.

Olkoot $V, V', \ldots$ äärellisulotteisia vektoriavaruuksia.

Lause 4.3.9. *Jos S ja T ovat kaksi V:n kantaa, on $M(\mathrm{id}_V; S \leftarrow T) = M(S \leftarrow T)$ kannanvaihtomatriisi. Erityisesti $M(\mathrm{id}_V; S \leftarrow S) = M(S \leftarrow S) = I_n$.*

Todistus. Koska ehto 4.3.3 määrää lineaarikuvauksen matriisin yksikäsitteisesti, seuraa väite siitä, että

$$M(\mathrm{id}_V; S \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T = [\mathrm{id}_V(\mathbf{v})]_S = [\mathbf{v}]_S = M(S \leftarrow T)[\mathbf{v}]_T \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad \square$$

Lause 4.3.10. *Olkoot $L : V \to V'$ ja $L' : V' \to V''$ lineaarisia, S V:n kanta, S' V':n kanta ja S'' V'':n kanta. Tällöin*

$$M(L' \circ L; S'' \leftarrow S) = M(L'; S'' \leftarrow S')M(L; S' \leftarrow S).$$

Todistus. Kuten edellisessäkin lauseessa, väite voidaan todistaa 4.3.3:n avulla:

$$\begin{aligned}
&\big(M(L'; S'' \leftarrow S')M(L; S' \leftarrow S)\big)[\mathbf{v}]_S \\
&= M(L'; S'' \leftarrow S')\big(M(L; S' \leftarrow S)[\mathbf{v}]_S\big) \overset{4.3.3}{=} M(L'; S'' \leftarrow S')[L(\mathbf{v})]_{S'} \\
&\overset{4.3.3}{=} [L'(L(\mathbf{v}))]_{S''} = [(L' \circ L)(\mathbf{v})]_{S''} \overset{4.3.3}{=} M(L' \circ L; S'' \leftarrow S)[\mathbf{v}]_S \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad \square
\end{aligned}$$

Äskeinen tulos perustuu siis matriisien kertolaskun liitännäisyyteen.

Seuraus 4.3.11. a) *Olkoon $L : V \to V'$ lineaarinen, S ja T kaksi V:n kantaa sekä S' ja T' kaksi V':n kantaa. Silloin*

$$M(L; T' \leftarrow T) = M(T' \leftarrow S')M(L; S' \leftarrow S)M(S \leftarrow T).$$

b) *Olkoon $L : V \to V$ lineaarinen, ja S ja T kaksi V:n kantaa. Tällöin*

$$M(L; T \leftarrow T) = Q^{-1}M(L; S \leftarrow S)Q, \quad \textit{missä} \quad Q = M(S \leftarrow T).$$

Todistus. a) 4.3.10:n nojalla on

$$\begin{aligned}
M(L;T' \leftarrow T) &= M(\mathrm{id_{V'}} \circ L \circ \mathrm{id_V}; T' \leftarrow T) \\
&= M(\mathrm{id_{V'}}; T' \leftarrow S')M(L;S' \leftarrow S)M(\mathrm{id_V}; S \leftarrow T) \\
&= M(T' \leftarrow S')M(L;S' \leftarrow S)M(S \leftarrow T).
\end{aligned}$$

b) on erikoistapaus (a):sta ($V' = V$, $S' = S$ ja $T' = T$). □

Olkoon $L : V \to V'$ lineaarikuvaus, $\dim(V) = n$, $\dim(V') = m$, S V:n kanta ja S' V':n kanta. Merkitään $A = M(L;S' \leftarrow S) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Silloin $A[\mathbf{v}]_S = [L(\mathbf{v})]_{S'}$ kaikilla $\mathbf{v} \in V$. Siispä

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v} \in \mathrm{Ker}(L) \iff [L(\mathbf{v})]_{S'} = \mathbf{0} \iff A[\mathbf{v}]_S = \mathbf{0} \iff [\mathbf{v}]_S \in \mathrm{Null}(A), \\
&\mathbf{v}' = L(\mathbf{v}) \in \mathrm{Im}(L) \iff [\mathbf{v}']_{S'} = [L(\mathbf{v})]_{S'} \iff [\mathbf{v}']_{S'} = A[\mathbf{v}]_S \in \mathrm{Col}(A).
\end{aligned}$$

On todistettu seuraava lause:

Lause 4.3.12. *$C_S : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ ja $C_{S'} : V' \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^m$ rajoittuvat isomorfismeiksi* $\mathrm{Ker}(L) \cong \mathrm{Null}(A)$ *ja* $\mathrm{Im}(L) \cong \mathrm{Col}(A)$*. Erityisesti* $\dim \mathrm{Im}(L) = \dim \mathrm{Col}(A) = \mathrm{rank}(A)$*.* □

Lause 4.3.13. *$L : V \to V'$ on isomorfismi $\iff$ $m = n$ ja $M(L;S' \leftarrow S) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ on säännöllinen. Tällöin*

$$M(L^{-1}; S \leftarrow S') = M(L;S' \leftarrow S)^{-1}.$$

Todistus. " $\Longrightarrow$ ". Olkoon L isomorfismi. Lauseen 4.2.14 mukaan on $m = n$. Lauseesta 4.3.10 seuraa sitten, että

$$M(L^{-1}; S \leftarrow S')M(L;S' \leftarrow S) = M(L^{-1} \circ L; S \leftarrow S) = M(\mathrm{id_V}; S \leftarrow S) = I_n,$$

ja samoin $M(L;S' \leftarrow S)M(L^{-1}; S \leftarrow S') = I_n$.

" $\Longleftarrow$ ". Olkoon $m = n$ ja $A = M(L;S' \leftarrow S) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ säännöllinen. Lauseen 4.3.7 mukaan on olemassa yksikäsitteinen lineaarikuvaus $L' : V' \to V$, jolla $M(L'; S \leftarrow S') = A^{-1}$. Nyt

$$\begin{aligned}
M(L' \circ L; S \leftarrow S) &\overset{4.3.10}{=} M(L'; S \leftarrow S')M(L;S' \leftarrow S) \\
&= A^{-1}A = I_n = M(\mathrm{id_V}; S \leftarrow S),
\end{aligned}$$

joten 4.3.7:sta seuraa, että $L' \circ L = \mathrm{id_V}$. Samoin $L \circ L' = \mathrm{id_{V'}}$. Näin ollen L on isomorfismi ja $L' = L^{-1}$. □

Lineaarikuvauksen matriisin märittäminen.

Olkoon $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ vektoriavaruuden V kanta, $S' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ vektoriavaruuden V' kanta, $L : V \to V'$ lineaarikuvaus ja $X = [\, x_{ij} \,] = M(L; S' \leftarrow S) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ L:n matriisi kantojen S ja S' suhteen. 4.3.5:n mukaan matriisialkiot x_{ij} määräytyvät yksikäsitteisesti ehdoista

$$L(\mathbf{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \mathbf{v}'_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Käsittelemme seuraavassa erästä erikoistapausta, jossa alkioiden x_{ij} määritys palautuu eräiden lineaaristen yhtälöryhmien ratkaisemiseen.

Laskumenetelmä 4.3.14. *Tarkastellaan lineaarikuvausta $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$, missä $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ on $m \times n$ -matriisi. Olkoon $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ jokin $\mathbb{R}^n$:n kanta ja $S' = (\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_m)$ jokin $\mathbb{R}^m$:n kanta. Muodostettava matriisi $X = [\, x_{ij} \,] = M(A; S' \leftarrow S)$.*

Ratkaisu. Muodostetaan matriisi $M_{S'} = M(E_m \leftarrow S') = [\, \mathbf{v}'_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{v}'_m \,] \in \mathbb{R}^{m \times m}$ kuten s. 61, missä E_m on $\mathbb{R}^m$:n luonnollinen kanta. Etsityn matriisin X j:s sarake $\mathbf{x}_j = [\, x_{1j} \ \ x_{2j} \ \ \ldots \ \ x_{mj} \,]^T$ määräytyy yksikäsitteisesti yhtälöryhmästä $M_{S'}\mathbf{x}_j = A\mathbf{v}_j$, ja nämä n yhtälöryhmää ($j = 1, \ldots, n$) voidaan ratkaista yhdellä kertaa, koska jokaisessa on kerroinmatriisina sama (säännöllinen) matriisi $M_{S'}$. Kun nimittäin $m \times (m + n)$ -matriisi

$$[\, M_{S'} \ \vdots \ A\mathbf{v}_1 \ \ \ldots \ \ A\mathbf{v}_n \,] = [\, \mathbf{v}'_1 \ \ \ldots \ \ \mathbf{v}'_m \ \vdots \ A\mathbf{v}_1 \ \ \ldots \ \ A\mathbf{v}_n \,]$$

muunnetaan alkeisrivitoimituksilla redusoituun porrasmuotoon, tuloksena on kerroinmatriisin säännöllisyyden ansiosta tyyppiä $[\, I_m \ \vdots \ B \,]$ oleva matriisi, ja tässä $B = X$. $\square$

Esimerkki 4.3.15. Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Muodostettava $X = M(A; S \leftarrow S)$, missä $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

Ratkaisu.

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \end{bmatrix};$$

$$[\, \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \vdots \ A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \,] = \left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 2 & -1 & 8 \\ -1 & 3 & 1 & 12 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 20 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Siis

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(Tuloksen saa tietysti suoraankin jos huomaa, että $A\mathbf{v}_1 = (-1)\mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2$ ja $A\mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2$; edellisestä yhtälöstä saadaan X:n ensimmäinen ja jälkimmäisestä toinen sarake). $\square$

Havaitsemme, että 4.3.15:ssa matriisin A (eli lineaarikuvauksen $\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v}$) geometrinen merkitys näkyy helpommin matriisista $X = M(A; S \leftarrow S)$: Kantavektorin $\mathbf{v}_1$ suuntaiset vektorit kuvautuvat vastavektoreikseen ja $\mathbf{v}_2$:n suuntaiset vektorit venytetään pituudeltaan nelinkertaisiksi.

Huomautus 4.3.16. 4.3.14:n tilanteessa on seurauksen 4.3.11 a) mukaan

$$X = M(S' \leftarrow E_m)M(A; E_m \leftarrow E_n)M(E_m \leftarrow S) = M_{S'}^{-1} A M_S,$$

missä E_n on $\mathbb{R}^n$:n luonnollinen kanta ja $M_S = M(E_n \leftarrow S) = [\,\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n\,]$. Etsitty matriisi X saadaan siis myös, kun muodostetaan käänteismatriisi $M_{S'}^{-1}$ kuten 1.6.7:ssä ja lasketaan matriisitulo $M_{S'}^{-1} A M_S$. Tämä tapa on yleensä työläämpi kuin 4.3.14:ssä esitetty.